انتگرال خور

نویسنده:

حسین ایزن

انتگرال خور

(روشهای انتگرال گیری)

جلد اول- انتگرال نامعین

نویسنده:

حسین ایزن

ویرایش اول:

مهرماه ۱۳۹۱

مقدمه

سلام

در کتابی که پیش رو دارید به بحث در مورد روشهای انتگرال گیری می پردازیم اسم کتاب رو **"انتگرال خور "** گذاشتم چون می خواستم یه اسم متفاوت داشته باشه. این کتاب حاصل چندین سال تدریس من در دانشگاههای مختلف هست در مورد محتوای اون هم شما باید نظر بدید اما به هر حال من سعی کردم حتی الامکان کتابی روان، کم اشتباه و کامل رو براتون آماده کنم در جلد اول انتگرال خور به بحث انتگرال نامعین و تکنیکهای انتگرال گیری می پردازیم. اگر خدا قسمت کنه جلدهای بعدی انتگرال خور که به انتگرال معین، انتگرال دوگانه و ... اختصاص خواهد داشت رو براتون آماده می کنم البته به جز مبحث ریاضی در رشته اصلی خودم یعنی مهندسی مکانیک هم مطالبی آماده کردم که امیدوارم بتونم اونها رو هم به صورت کتاب در بیارم.

من همیشه سعی کردم در کلاسهام ارتباط نزدیکی با بچه ها داشته باشم و در این کتاب هم همین روال رو دنبال کردم بنابراین در اینجا صرفا با یکسری از فرمولهای خشک ریاضی طرف نمی شید. خودم دوست داشتم کتاب رو به صورت رنگی آماده کنم اما چون ممکنه خدای ناکرده یک وقتی کسی بخواد کتاب رو پرینت بگیره و مطالعه کنه! کتاب رو به صورت تک رنگ نوشتم تا مشکل پرینت هم نداشته باشید.

در آخر اگر سوالی، پیشنهادی، تعریفی، تحسینی(یا احیانا زبونم لال انتقادی!) هم داشتید می تونید از یکی از سه روش زیر استفاده کنید:

روش اول: استفاده از پیغامگیر: ۰۹۳۷ ۲۴۳ ۱۱۷۴

مثلا اگر در صفحه ۲۵ خط ششم اشکالی دارید اشاره کنید تا در سایت براتون توضیح بیشتری بدم و در ویرایشهای بعدی انتگرال خور اصلاحات لازم رو انجام بدم.

روش دوم: مراجعه به سایت: www.integralkhor.blogfa.com

روش سوم: پست الکترونیکی: integralkhor@gmail.com

با آرزوی موفقیت

حسین ایزن- بیست هفتم مهرماه ۱۳۹۱

فهرست

فصل اول: تعریف انتگرال و فرمولهای پایه انتگرال گیری .... صفحه: ۱

فصل دوم: روش تغییر متغیر و فرمولهای تعمیم یافته ....صفحه: ۲۳

فصل سوم: تغییر متغیرهای مثلثاتی ....صفحه: ۴۶

فصل چهارم: انتگرال گیری از کسرهای گویا ....صفحه: ۶۲

فصل پنجم: روش جزء به جزء .... صفحه: ۷۸

فصل ششم: انتگرال های مثلثاتی .... صفحه: ۹۵

فصل اول: تعریف انتگرال و فرمولهای مقدماتی

مقدمه

حتما تا حالا این جمله رو شنیدید که بچه ها(چه دانش آموز و چه دانشجو) می گن: "ما مشتق رو خوب بلدیم اما از انتگرال سر در نمی آریم!" در جواب این افراد باید بگم که: اگر شما مشتق رو خوب یاد بگیرید و یک سری ریزه کاریها رو هم بلد باشید میتونید خیلی راحت عملیات انتگرال گیری رو انجام بدید ما در کتاب **انتگرال خور** که در چندین جلد آماده میشه (انتگرال نامعین، انتگرال معین، انتگرال دوگانه و ...) سعی می کنیم این ریزه کاریها رو با هم مرور کنیم، خب سرتون رو درد نیارم بریم سراغ درسمون.

انتگرال

به صورت خیلی ساده **انتگرال گیری عکس عمل مشتق گیری** است اما چطور؟ به مثال زیر دقت کنید:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 2x$$

حالا اگه از شما بپرسن اون چه تابعی هست که مشتقش شده $2x$ چی میگین؟ حتما سریع میگین: خب معلومه x^2 شایدم یکی بگه x^2+5 یا x^2+1 و همه این جوابها هم درسته. واقعیت اینه که شما نمی تونید بگید عدد ثابتی که با x^2 جمع شده چند بوده چون در مشتق گیری عدد ثابت حذف میشه (صفر میشه) بنابراین به صورت کلی می تونیم بگیم جواب ما x^2+c هست که c یه عدد ثابته. به بیان انتگرالی داریم:

$$\int 2x\,dx = x^2 + c$$

خب حالا بگید اون چه تابعیه که مشتقش شده $3x^2$ ؟

آقااجازه: معلومه x^3+c یا به بیان انتگرالی:

$$\int 3x^2\,dx = x^3 + c$$

آفرین مشخصه که درسو یاد گرفتین! دیگه وقتشه بریم سراغ اصل مطلب یعنی تعریف انتگرال.

تعریف انتگرال

شکل کلی یک انتگرال به صورت زیرهست:

$$\int_a^b f(x)dx$$

که a را حد پایین و b را حد بالای انتگرال می گوییم $f(x)$ هم تابع جلوی انتگرال هست.

تذکر یک: اگر حدود انتگرال یعنی a,b داده شده باشند انتگرال رو معین و در غیر اینصورت انتگرال رو نامعین میگوییم.

انتگرال معین	$\Rightarrow$	$\int_a^b f(x)dx$
انتگرال نامعین	$\Rightarrow$	$\int f(x)dx$

ما در جلد اول **انتگرال خور** فقط انتگرال نامعین رو بررسی می کنیم.

تذکر دو: dx یعنی انتگرالگیری نسبت به x انجام می شود (متغیر ما x است) بنابراین **هر عبارتی که x ندارد عدد ثابت فرض می شود.**

حالا که با تعریف انتگرال آشنا شدید یه نکته ای رو عنوان می کنم که همیشه باید تو ذهنتون باشه:

اگر از جواب انتگرال نامعین مشتق بگیریم باید به تابع جلوی انتگرال برسیم

به بیان انتگرالی داریم :

$$\int f(x)dx = g(x) \quad \rightarrow \quad g'(x) = f(x)$$

به عنوان مثال:

$$\int cos\,x \;\, dx = sin\,x \quad \Rightarrow \;(sin\,x)' = cos\,x$$

$$\int \frac{dx}{x} = Ln|x| \quad \Rightarrow \;(Ln\;x)' = \frac{1}{x}$$

تذکر مهم: ***یادتون باشه جواب انتگرال رو از هر روشی بدست بیارید (کمک از بغل دستی، نوشتن داخل ماشین حساب، هندز فیری...) باید در قاعده بالا صدق کنه!!***

مثال: *فرض کنید در جلسه امتحان انتگرالی به صورت*

$$\int \frac{2x^2+1}{x}dx$$

داده شده و بغل دستی شما جواب رو به صورت $g(x) = x^2 - Ln(x)$ *بدست آورده! آیا به نظرتون جواب درسته؟*

حل: *خب کافیه از جواب مشتق بگیریم:*

$$g(x) = x^2 - Ln(x) \;\Rightarrow\; g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$$

همونطور که می بینید جواب درست نیست! البته فقط یه منفی اشتباه داره و جواب درست به صورت $g(x) = x^2 + Ln(x)$ *است.*

نتیجه گیری اخلاقی: *سعی کنید به معلومات خودتون تکیه کنید.*

دو قانون مهم در انتگرال گیری

قانون اول

اگر یادتون باشه برای مشتق گیری از جمع و تفریق چند تابع کافیه از تک تک توابع جداگانه مشتق بگیریم. در اینجا برای انتگرال گیری هم به همین صورت عمل می کنیم یعنی اگر در جلوی انتگرال جمع یا تفریق چند تابع رو داشته باشیم برای تک تک توابع جداگانه انتگرال می نویسیم به بیان ریاضی داریم:

$$\int (f(x) \pm g(x) \pm \cdots)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx \pm \cdots$$

به عنوان مثال:

$$\int (x^2 + 3x - 7)\, dx = \int x^2 dx + \int 3x\, dx - \int 7dx$$

تذکر یک: وقتی برای هر تابع جداگانه انتگرال رو نوشتید dx فراموش نشه!

تذکر دو: وقتی یکم حرفه ای شدید می تونید یکدفعه انتگرال گیری رو انجام بدید و دیگه نیازی به تفکیک انتگرال نیست.

و اما قانون دوم

اگر یک عدد ثابت (مانند k) در تابع جلوی انتگرال ضرب شده باشد می توان آن را از انتگرال بیرون آورد.

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$$

اگه یادتون باشه همین قانون رو در مورد مشتق گیری هم داشتیم.

چند مثال:

$$(a)\int 5x\,dx = 5\int x\,dx \qquad (b)\ \int \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{3}\int x^2dx$$

$$(c)\ \int tx^2dx = t\int x^2dx \qquad (d)\int tx^2dt = x^2\int t\,dt$$

تفاوت انتگرال (c) و (d) رو متوجه شدید یا نه؟

توجه کنید در انتگرال (c) متغیر x هست (چون dx داریم) بنابراین t عدد ثابت محسوب می شه و از انتگرال بیرون میاد اما در انتگرال (d) متغیر t هست(چون dt داریم) بنابراین x^2 عدد ثابت محسوب می شه و از انتگرال بیرون میاد.

و اما قانون سوم و چهارم!

متاسفانه بعضی از بچه ها فکر می کنن برای انتگرال گیری از ضرب و تقسیم توابع هم (مثل مشتق) فرمول داریم اما متاسفانه چنین فرمولی وجود ندارد بنابراین روابط زیر اشتباه هستند:

$$\int f(x).g(x)dx \neq (\int f(x)dx)(\int g(x)dx)$$

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}dx \neq \frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$$

بنابراین قانون سوم و چهارمی وجود ندارد!! ☹

مثال: انتگرال های داده شده را برای انتگرال گیری آماده کنید!

$a)\int (5s^2-3\cos x)\,dx$ $\qquad$ $b)\int \left(\frac{3x^4}{5}+\frac{2}{x}+7\right)\,dx$

$c)\int e^{x+y}\,dx$ $\qquad$ $d)\int \frac{5x^2+3}{x}dx$

حل:

$$a)\int (5s^2-3\cos x)\,dx=\int 5s^2dx-\int 3\cos x\,dx=5s^2\int dx-3\int \cos x\,dx$$

$$b)\int \left(\frac{3x^4}{5}+\frac{2}{x}+7\right)\,dx=\int \frac{3x^4}{5}dx+\int \frac{2}{x}dx+\int 7\,dx=\frac{3}{5}\int x^4\,dx+2\int \frac{1}{x}dx+7\int dx$$

$$c)\int e^{x+y}\,dx=\int e^ye^x\,dx=e^y\int e^xdx$$

$$d)\int \frac{5x^2+3}{x}dx=\int \frac{5x^2}{x}dx+\int \frac{3}{x}dx=5\int x\,dx+3\int \frac{1}{x}\,dx$$

تذکر: می دونم همتون بلدید ولی برای یادآوری:

$$\frac{3x^4}{5}=\frac{3}{5}x^4 \quad , \quad \frac{2}{x}=2\frac{1}{x} \quad , \quad \frac{x+3}{7}=\frac{1}{7}(x+3)$$

به همین صورت میتونیم بنویسیم:

$$\frac{x+\cos x}{5}=\frac{1}{5}(x+cos\,x) \quad \text{یا} \quad \frac{x+cos\,x}{5}=\frac{x}{5}+\frac{cos\,x}{5}=\frac{1}{5}x+\frac{1}{5}cos\,x$$

ممکنه این نکاتی رو که گفتم خیلی پیش پا افتاده به نظرتون بیاد اما تجربه نشون داده که عدم توجه به همین نکات ساده منشاء اکثر اشتباهات در انتگرال گیری بوده و خواهد بود!!

فرمولهای پایه انتگرال گیری

در این قسمت ما در ابتدا یکسری از انتگرال های ساده رو حفظ می کنیم و در ادامه سعی می کنیم انتگرال های پیچیده تر رو با استفاده از تکنیک هایی مثل تغییر متغیر یا جزء به جزء به انتگرال های ساده تر تبدیل کنیم. این انتگرال های ساده رو در اینجا فرمولهای پایه انتگرال گیری می نامیم. و اما اولین فرمول:

$$\int dx = x + c$$

دقت کنید اگر از $x + c$ (یعنی جواب انتگرال) مشتق بگیریم به تابع جلوی انتگرال می رسیم .

تذکر: واضحه فرمول بالا رو می تونیم در مورد هر متغیر دیگری هم بنویسید به عنوان مثال

$$\int dy = y + c \quad , \quad \int dt = t + c \quad , \quad \int d(☺) = ☺ + c$$

آقا اجازه: می تونیم بگیم $\int$ و d همدیگرو خنثی می کنن و فقط x می مونه؟

استاد: چراغ خاموش آره میشه گفت! ولی سعی کن به این قوانین آبگوشتی زیاد تکیه نکنی!!!

قبل از اینکه بریم سراغ فرمول دوم دو تا رابطه رو براتون یادآوری می کنم.

یادآوری ۱

$$(a) \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \qquad (b) \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}$$

به عنوان مثال:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \qquad \sqrt{x} = \sqrt[2]{x^1} = x^{\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{x^2} = x^{-2} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

و اما رابطه دوم

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

رابطه بالا مهمترین و پرکاربردترین رابطه مبحث انتگرال گیری می باشد بنابراین باید کاملا بر اون مسلط باشید.

تذکر یک: در فرمول بالا n (یعنی توان x) می تواند هر عددی (کسری،صحیح،....) به جز-1 باشد

تذکر دو: برای استفاده از فرمول بالا حتما باید x^n در صورت کسر باشد. بنابراین اگر در مسئله داده شده x در مخرج کسر یا در زیر رادیکال باشد باید آن را با استفاده از روابط بالا (**یادآوری۱**) به صورت توان دار در صورت کسر نوشت.

حالا چند تا مثال آسون با هم حل می کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر:

$$(a)\ \int x^2 dx \qquad (b)\ \int x^{\frac{3}{5}} dx \qquad (c)\ \int \sqrt{x}\, dx \qquad (d)\ \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$(e)\ \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \qquad (f)\ \int \frac{3x}{7} dx \qquad (g)\ \int \left(x\sqrt{x}+2\right) dx \qquad (h)\ \int \frac{4x^5+7}{3x^2} dx$$

حل:

$$(a)\ \int x^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3} + c \qquad (b)\ \int x^{\frac{3}{5}} dx = \frac{x^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} = \frac{x^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}\ \sqrt[5]{x^8} + c$$

تذکر: معمولا بعد از انتگرال گیری و بدست آوردن جواب آخر بهتره که جواب رو به جای توان کسری به صورت رادیکالی بنویسیم.

$$(c)\ \int \sqrt{x}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} = \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{x} + c$$

دقت کنید $x^{\frac{3}{2}}$ رو می تونیم به دو صورت بنویسیم یکی به صورت $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{x^3} = \sqrt{x^3}$ یا اینکه بنویسیم؛

$x^{\frac{3}{2}} = x.x^{\frac{1}{2}} = x\sqrt{x}$ در واقع توان صحیح x رو بیرون رادیکال نوشتیم

$$(d)\ \int \frac{1}{x^2}dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -x^{-1} = \frac{-1}{x} + c$$

$$(e)\ \int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}dx = \int x^{\frac{-1}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + c$$

$$(f)\ \int \frac{3x}{7}dx = \frac{3}{7}\int x\,dx = \frac{3}{7}\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{3x^2}{14} = \frac{3}{14}\,x^2 + c$$

$$(g)\ \int\left(x\sqrt{x}+2\right)dx = \int x\sqrt{x}\,dx + \int 2dx = \int x.x^{\frac{1}{2}}\,dx + 2\int dx = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$
$$+ 2x = \frac{2}{5}\,x^2\sqrt{x} + 2x + c$$

$$(h)\ \int \frac{4x^5+7}{3x^2}dx = \int \left(\frac{4x^5}{3x^2} + \frac{7}{3x^2}\right)dx$$
$$= \int \frac{4}{3}x^3dx + \int \frac{7}{3}\frac{1}{x^2}dx = \frac{4}{3}\int x^3dx + \frac{7}{3}\int x^{-2}dx = \frac{4}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right)$$
$$+ \frac{7}{3}\left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) = \frac{x^4}{3} - \frac{7}{3x} + c$$

قلق مهم: برای محاسبه انتگرالهای کسری که مخرج کسر تک جمله ای باشد معمولا بهتر است کسر را تفکیک کنیم

$$\frac{a+b+c}{\mathrm{d}}=\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}+\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{d}}+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$$

سه حالت خاص مهم از رابطه دوم (این سه تا انتگرال رو حفظ کنید واسه آیندتون خوبه!)

$$\int x dx=\frac{x^2}{2} \qquad \int \frac{1}{x^2} dx=\frac{-1}{x} \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}$$

رابطه سوم، انتگرال سینوس و کسینوس

$$(a)\int \cos x \, dx=\sin x+c \qquad (b)\int \sin x \, dx=-\cos x+c$$

حالا از جواب انتگرال های بالا مشتق می گیریم ببینیم به تابع جلوی انتگرال می رسیم یا نه!

$$y=\sin x \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=\cos x$$

$$y=-\cos x \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=-(-\sin x)=\sin x$$

می بینید که همه چی آرومه!

قبل از اینکه از این قسمت مثال حل کنیم چند تا رابطه مثلثاتی رو براتون یادآوری می کنم.

یادآوری ۲

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \qquad \tan x + \cot x = \frac{1}{\sin x \,.\, \cos x} \qquad \tan x = \frac{1}{\cot x}$$

$$1 + tan^2(x) = sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)} \qquad 1 + cot^2(x) = csc^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$$

$$\cos 2x = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x) = 2cos^2\,(x) - 1$$

$$\sin 2x = 2\sin x . \cos x \qquad (\sin x \pm \cos x)^2 = 1 \pm \sin 2x$$

خب حالا چند انتگرال خوشگل با هم حل می کنیم .

تذکر: دقت کنید ایده های ساده ای که در حل این انتگرال ها بکار رفته بعدا بدردتون می خوره.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{cos^2x - sin^2x}{\cos x + \sin x}\, dx \qquad (b) \int \frac{\sin 2x}{\cos x}\, dx$$

$$(c) \int \frac{1 + \sin 2x}{\sin x + \cos x}\, dx \qquad (d) \int (\tan x + \cot x) \sin 2x \, dx$$

$$(e) \int \sin x \,.\, \cos t \;\, dt \qquad (f) \int \frac{cos^2x}{1 + \cos 2x}\, dx$$

حل:

$$(a)\int \frac{cos^2x-sin^2x}{\cos x+\sin x}\ dx=\int \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)}{(\cos x+\sin x)}dx$$

$$=\int(\cos x-\sin x)dx=\int \cos x\ \ dx-\int \sin x\ \ dx=\sin x+\cos x+c$$

$$(b)\int \frac{\sin 2x}{\cos x}\ dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=\int 2\sin x\ \ dx=-2\cos x+c$$

$$(c)\int \frac{1+\sin 2x}{\sin x+\cos x}\ dx=\int \frac{(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}dx=\int(sinx+cosx)\,dx$$
$$=-cosx+sinx=sinx-cosx+c$$

$$(d)\int(\tan x+\cot x)\sin 2x\,dx=\int \frac{\sin 2x}{\sin x\cos x}\ dx=\int \frac{2\sin x\cos x}{\sin x\cos x}\ dx$$
$$=\int 2\,dx=2x+c$$

$$(e)\int \sin x\,.\cos t\ \ dt=\sin x\int \cos t\,dt=\sin x\,.\sin t+c$$

$$(f)\int \frac{cos^2x}{1+\cos 2x}\ dx=\int \frac{\frac{1+\cos 2x}{2}}{1+\cos 2x}\ dx=\int \frac{1}{2}\ dx=\frac{x}{2}+c$$

دقت کنید در حل انتگرال بالا صورت کسر رو به شکل زیر نوشتیم:

$$\cos 2x=2cos^2x-1\quad\Rightarrow\quad 2\cos^2x=1+\cos 2x\quad\Rightarrow\ cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$$

رابطه چهارم

$$(a) \int (1+tan^2x)\,dx = \int sec^2x\,dx = \int \frac{dx}{cos^2x} = \tan x + c$$

$$(b) \int (1+cot^2x)dx = \int csc^2x\,dx = \int \frac{1}{sin^2x}dx = -\cot x + c$$

$$(c) \int \sec x\,.\tan x\ \ dx = \int \frac{sin\,x}{cos^2x}\ dx = \sec x + c$$

$$(d) \int \csc x.\cot x\ \ dx = \int \frac{\cos x}{sin^2x}\ dx = -\csc x + c$$

اگه یادتون باشه داشتیم:

$$y = \tan x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = 1 + tan^2x = sec^2x = \frac{1}{cos^2x}$$

$$y = \cot x \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = -(1 + cot^2x) = -csc^2x = \frac{-1}{sin^2x}$$

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{sin\,x}{cos^2x} = \frac{1}{cos\,x}\frac{sin\,x}{cos\,x} = sec\,x\,.tan\,x$$

$$y = \csc x = \frac{1}{\sin x} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{cos\,x}{sin^2x} = \frac{1}{sin\,x}\ \frac{cos\,x}{sin\,x} = csc\,x\,.cot\,x$$

دقت کنید برای محاسبه انتگرال سکانت آن را به صورت معکوس کسینوس نوشته سپس از قانون مشتق کسر استفاده می کنیم (به همین صورت برای کسکانت)

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال های زیر:

$$(a)\int tan^2x\,dx \qquad (b)\int \frac{3}{1-cos^2x}\,dx \qquad (c)\int \frac{sin^3x+cos^3x}{sin^2x.cos^2x}\,dx$$

حل:

$$(a)\int tan^2x\,dx=\int(1+tan^2x-1)dx=\int(1+tan^2x)dx-\int dx=\tan x-x+c$$

تذکر: دقت کنید برای حل انتگرال بالا ابتدا عدد یک رو به انتگرال اضافه کردیم تا به شکل رابطه (a) در بیاد سپس دوباره یک رو از انتگرال کم کرده و انتگرال ها رو تفکیک کردیم.

$$(b)\int\frac{3}{1-cos^2x}\,dx=\int\frac{3}{sin^2x}\,dx=3\int\frac{1}{sin^2x}\,dx=-3\,cotx+c$$

$$(c)\int\frac{sin^3x+cos^3x}{sin^2x.cos^2x}\,dx=\int\frac{sin^3x}{sin^2x.cos^2x}\,dx+\int\frac{cos^3x}{sin^2x.cos^2x}\,dx$$

$$=\int\frac{\sin x}{cos^2x}\,dx+\int\frac{\cos x}{cos^2x}dx=\sec x-\csc x+c$$

تابع نمایی و لگاریتمی

قبل از شروع بحث جدید به یادآوری توابع نمایی و لگاریتمی می پردازیم.

یادآوری ۳

تابع نمایی: منظور از تابع نمایی تابعی به صورت a^x است که a را پایه و x را نما (توان) می گوییم اگر پایه تابع نمایی برابر عدد نپر (e=2.718...) باشد به آن تابع نمایی طبیعی می گوییم(به صورت خلاصه تابع نمایی) تابع e^x از قوانین ضرب و تقسیم اعداد توان‌دار پیروی می کند یعنی داریم:

$$e^x . e^y = e^{x+y} \qquad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \qquad (e^x)^y = e^{xy}$$

یادآوری ۴

لگاریتم: لگاریتم تابع را به صورت زیر می نویسیم:

$$\log_a y = x$$

و می خوانیم لگاریتم y در مبنای(پایه) a می شود x. رابطه بین تابع لگاریتمی و نمایی به صورت زیر است:

$$\log_a y = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = y$$

اگر مبنای لگاریتم عدد نپر باشد به جای $\log_e y$ می نویسیم $Ln\ y$ و به آن لگاریتم طبیعی می گوییم قوانین پایه لگاریتم طبیعی به صورت زیر بیان می شود:

$$Ln\ x + Ln\ y = Ln\ (xy) \qquad Ln\ x - Ln\ y = Ln\left(\frac{x}{y}\right) \qquad Ln\ x^n = n\ Ln\ x$$

$$Ln\ e = 1 \qquad Ln\ 1 = 0$$

حالا چندتا مثال مهم می زنم خوب دقت کنید:

$$(a)\quad Ln(x-1)+Ln(x+1)=Ln(x^2-1)$$

$$(b)\quad Ln(x-1)-Ln(x+1)=Ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$(c)\quad -Ln(x+1)=Ln(x+1)^{-1}=Ln\frac{1}{x+1}$$

$$(d)\quad Ln\sqrt{x+3}=Ln(x+3)^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\,Ln(x+3)$$

$$(e)\quad Ln(x^2-x)=Ln\,x(x-1)=Ln\,x+Ln\,(x-1)$$

$$(f)\quad -Ln\,\cos x=Ln(\cos x)^{-1}=Ln\frac{1}{\cos x}=Ln\,\sec x$$

$$(g)\quad Ln\frac{1}{\sqrt{x}}=-Ln\sqrt{x}=-\frac{1}{2}Ln\,x$$

و اما انتگرال توابع نمایی و لگاریتم

حتما یادتون هست که مشتق e^x میشه خودش بنابراین انتگرال e^x هم خودش می شود. یعنی:

$$\int e^x dx=e^x+c$$

مثال:

$$\int e^{x+2}dx=\int e^x.e^2dx=e^2\int e^xdx=e^2(e^x+c)=e^{x+2}+c$$

همچنین مشتق $Ln\ x$ میشه $\frac{1}{x}$ بنابراین:

$$\int \frac{1}{x} dx = Ln|x| + c$$

آقا اجازه: این علامت قدر مطلق چیه؟

استاد: علامت قدر مطلق واسه اینه که تابع جلوی لگاریتم باید مثبت باشه، البته خودم زمان دانشجویی هیچوقت علامت قدر مطلق رو جلوی لگاریتم نمی زاشتم چون ازش خوشم نمیومد!! البته شما بهتره از این کارای بد انجام ندی!

مثال: انتگرال های زیر را حل کنید

$$(a) \int \frac{1}{2x}\, dx \qquad (b) \int \frac{x+3}{x}\, dx \qquad (c) \int \frac{x-2}{x^2}\, dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{1}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{2}\, Ln|x| + c = Ln\sqrt{x} + c$$

$$(b) \int \frac{x+3}{x}\, dx = \int (\frac{x}{x} + \frac{3}{x})\, dx = \int \left(1 + \frac{3}{x}\right) dx = \int dx + 3\int \frac{1}{x}\, dx$$
$$= x + 3Ln|x| + c = x + Ln|x|^3 + c$$

متوجه شدید که از چه قلقی استفاده کردیم یا به این زودی یادتون رفت ؟؟!!!

$$(c) \int \frac{x-2}{x^2}\, dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx - 2\int \frac{1}{x^2} dx = Ln|x| - 2\left(\frac{-1}{x}\right) + c$$
$$= Ln|x| + \frac{2}{x} + c$$

انتگرال $\int \frac{1}{x^2}\, dx$ خاطرتون هست ؟ مگه نگفتم حفظش کنید واسه آیندتون خوبه !!

حالا می خوایم توابع نمایی و لگاریتمی رو با هم قاطی کنیم ببینیم چی از توش در میاد ؟ اما قبلش طبق روال دو تا رابطه رو یادآوری می کنیم.

یادآوری ۵

$$Ln\, e^{f(x)} = f(x) \qquad \text{مثلا} \rightarrow Ln\, e^{\sin x} = \sin x$$

$$e^{Ln\, f(x)} = f(x) \qquad \text{مثلا} \rightarrow e^{Lnx^2} = x^2$$

اگه دقت کنید می بینید که $e\,, Ln$ همدیگر رو خنثی می کنند و فقط $f(x)$ می مونه!

آقا اجازه: آخه چه کاریه الکی از خودمون رابطه در بیاریم ؟؟

استاد: اتفاقا این دو تا رابطه در خیلی از دروس مهندسی(به خصوص معادلات دیفرانسیل) به دردتون می خوره اما چطور؟ یه مثال براتون می زنم.

فرض کنید در خلال حل یک مسئله به رابطه $e^y = .5$ رسیدیم و مسئله از ما y رو می خواد حالا چطور از شر e خلاص بشیم ؟

جواب: کافیه از طرفین رابطه ای که بدست آوردیم Ln بگیریم و سپس از رابطه $Ln\, e^{f(x)} = f(x)$ استفاده کنیم.

$$e^y = .5 \;\Rightarrow Lne^y = Ln\, .5 \quad \Rightarrow y = Ln\, .5 = -.693 \quad \Rightarrow\; y = -.693$$

بنابراین:

هرگاه با رابطه ای به صورت $e^{f(x)} = k$ مواجه شدیم برای بدست آوردن $f(x)$ از طرفین رابطه Ln می گیریم و از رابطه $Ln\, e^{f(x)} = f(x)$ استفاده می کنیم

حالا فرض کنید در خلال حل یک مسئله به رابطه $Ln\,x = 2.2$ رسیدیم و مسئله از ما x رو می خواد حالا چطور از شر Ln خلاص بشیم ؟

جواب: کافیه طرفین رابطه ای رو که بدست آوردیم توان e قرار دهیم و سپس از رابطه $e^{Ln\,f(x)} = f(x)$ استفاده کنیم.

$$Ln\,x = 2.2 \;\Rightarrow e^{Ln\,x} = e^{2.2} \quad \Rightarrow x = e^{2.2} = 9 \quad \Rightarrow\; x = 9$$

بنابراین:

هرگاه با رابطه ای به صورت $Ln\,f(x) = k$ مواجه شریم برای بدست آوردن $f(x)$ طرفین رابطه را توان e قرار می دهیم و از رابطه $e^{Ln\,f(x)} = f(x)$ استفاده می کنیم

حالا که این دو تا رابطه رو یاد گرفتید چند تا انتگرال قشنگ با هم حل می کنیم

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\int e^{2Ln\,x}dx \qquad (b)\int e^{-Ln\,x}dx \qquad (c)\int Lne^{\cos x}\,dx$$

حل:

$$(a)\int e^{2Ln\,x}dx = \int e^{Ln\,x^2}dx = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c$$

$$(b)\int e^{-Ln\,x}dx = \int e^{Ln\frac{1}{x}}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = Ln|x| + c$$

$$(c)\int Lne^{\cos x}\,dx = \int \cos x\,dx = \sin x + c$$

توابع معکوس مثلثاتی

در آخرین بخش از این فصل به بررسی انتگرال توابع معکوس مثلثاتی(آرک سینوس و آرک تانژانت) می پردازیم.

همونطور که یادتون هست (که مطمئنم یادتون نیست!!!) از مبحث مشتق داشتیم:

$$y = \sin^{-1} x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \tan^{-1} x \qquad \Longrightarrow \qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$$

بنابراین داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \tan^{-1} x + c$$

و در حالت کلی داریم:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1} \frac{x}{a} + c$$

توجه: در روابط بالا a عددی ثابت است.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \qquad (b)\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} \qquad (c)\int \frac{dx}{4+x^2} \qquad (d)\ \int \frac{dx}{1+9x^2}$$

حل:

$$(a)\ \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} \quad \Longrightarrow \quad a^2=2 \quad \Rightarrow a=\sqrt{2} \quad \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{2}}+c$$

$$(b)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{2\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} \quad \Rightarrow\ a^2=\frac{1}{4} \quad \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-x^2}} = \frac{1}{2}\ \sin^{-1}\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sin^{-1}2x+c$$

$$(c)\ \int \frac{dx}{4+x^2} = \int \frac{dx}{2^2+x^2} = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}+c$$

$$(d)\ \int \frac{dx}{1+9x^2} = \int \frac{dx}{9\left(\frac{1}{9}+x^2\right)} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} \quad \Rightarrow\ a^2=\frac{1}{9} \quad \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{9}\int \frac{dx}{\frac{1}{9}+x^2} = \frac{1}{9}\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\tan^{-1}\frac{x}{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\tan^{-1}3x+c$$

مسائل فصل اول

۱ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1)\ \int (2+tan^2x)\,dx \qquad (2)\ \int x\ dt$$

$$(3)\ \int d(x^2+3x) \qquad (4)\ \int Ln(\frac{1}{e^x})\ dx$$

$$(5)\ \int e^{2Ln\, secx}\,dx \qquad (6)\ \int \frac{x^2-3x+2}{\sqrt{x}}dx$$

$$(7)\ \int \frac{(x+1)^3}{2x}\ dx \qquad (8)\ \int \frac{dx}{4x^2+25}$$

$$(9)\ \int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} \qquad (10)\ \int e^2dx$$

۲ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$$(1)\ \int \frac{dx}{sin^2x.cos^2x} \qquad (2)\ \int (tan^2x.\sin x)\,dx$$

$$(3)\ \int \frac{x^4}{x^2+1}\ dx \qquad (4)\ \int \frac{\sin x}{1-sin^2x}\ dx$$

$$(5)\ \int e^{-2Ln\, x}dx \qquad (6)\ \int \left(\int x^2t^3\,dt\right)dx$$

$$(7)\ \int \frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}\ dx \qquad (8)\ \int (2+tan^2x)\,dx$$

فصل دوم : روش تغییر متغیر (جانشینی)

تا اینجای کار برخی از انتگرال های ساده رو با استفاده از روابط پایه حساب کردیم اما خیلی از انتگرال هایی که ما باهاشون روبرو می شیم با استفاده از این فرمولها قابل حل نیستند بنابراین باید با استفاده از روشهای خاصی انتگرال های داده شده را ساده کنیم یکی از این روشها ، روش تغییر متغیر نام دارد که در ادامه به توضیح آن می پردازیم

انتگرال زیر رو در نظر بگیرید، (مشخصه که این انتگرال رو نمی تونیم از روابط پایه حساب کنیم)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

ابتدا عبارت زیر رادیکال رو برابر یه متغیر جدید مثل u قرار میدیم و سپس از طرفین رابطه دیفرانسیل می گیریم:

$$u = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

آقا اجازه: دیفرانسیل می گیریم یعنی چی؟

استاد: خیلی ساده بخوایم بگیم اول از عبارت مشتق بگیر بعد حاصل مشتق رو در dx ضرب کن.

حالا عبارت رو به صورت $dx = \cdots$ مرتب می کنیم

$$du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

سپس در انتگرال اولیه به جای x^2-1 ، u و به جای dx عبارت $\frac{du}{2x}$ رو قرار میدیم.

حالا انتگرال رو ساده می کنیم تا برحسب u در بیاد (x ها خط بخورن)

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{2x} = \int \frac{du}{2\sqrt{u}}$$

در آخر انتگرال رو بر حسب u حل کرده و در جواب انتگرال به جای u همان x^2-1 را قرار می دهیم.

$$\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\int u^{\frac{-1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right) = u^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u} + c = \sqrt{x^2-1} + c$$

مراحل کار در روش تغییر متغیر

در اینجا به خاطر اینکه به صورت اصولی با روش تغییر متغیر آشنا بشید مراحل کار رو به صورت قدم به قدم براتون توضیح میدم:

قدم اول

قسمتی از تابع جلوی انتگرال را برابر یک متغیر جدید مانند u قرار می دهیم مثلا:

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx \quad \Rightarrow \quad u = x^2+1$$

قدم دوم

از تابع دیفرانسیل می گیریم و عبارت را به صورت $dx = \cdots$ مرتب می کنیم مثلا:

$$u = x^2+1 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{2x}$$

قدم سوم

با جایگذاری dx و u در انتگرال اولیه آن را بر حسب u بازنویسی می کنیم

$$\int x\sqrt{x^2+1}\,dx = \int x\sqrt{u}\;\frac{du}{2x} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\;du$$

قدم چهارم

انتگرال حاصل را بر حسب u حل کرده و در جواب نهایی به جای u همان عبارت بر حسب x را قرار می دهیم تا جواب نهایی بر حسب x بدست آید.

$$\frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3} + c$$

آقا اجازه: انتخاب u دست خودمونه؟

استاد: نخیل!!! انتخاب u قلق داره و یه مقدار تمرین و تجربه می خواد که من اینجا یه سری از قلق ها رو بهتون می گم پس خوب گوش کنید:

الف) اگر در جلوی انتگرال عبارت رادیکالی داشتیم تابع زیر رادیکال را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int \sqrt{3x-4}\, dx \quad \Rightarrow \quad u = 3x-4$$

ب) اگر در جلوی انتگرال پرانتز توان‌دار داشتیم تابع درون پرانتز(بدون توان) را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int (5x-3)^4 dx \quad \Rightarrow \quad u = 5x-3$$

ج) اگر در جلوی انتگرال عباراتی به شکل $\sin(\ldots)$ یا $\cos(\ldots)$ یا مشابه آن داشتیم عبارت داخل پرانتز را برابر u می گیریم مثلا:

$$\int \sin(3x+2)\, dx \quad \Rightarrow \quad u = 3x+2$$

تذکر مهم: دقت کنید که تکنیکهای بالا درهمه موارد جواب نمیده

مثال: انتگرال های زیر را با استفاده از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(a) \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\, dx \qquad (b) \int x\sqrt{x-5}\, dx \qquad (c) \int \frac{x}{(x+1)^2}\, dx$$

$$(d) \int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx \qquad (e) \int \frac{Ln\, x}{x}\, dx \qquad (f) \int \frac{1}{x.Ln\, x}\, dx$$

$$(g) \int \frac{2x+3}{2x+1}\, dx \qquad (h) \int \frac{\sin 2x}{1+sin^2 x}\, dx \qquad (i) \int cos^2 x.\sin x\, dx$$

حل:

$$(a)\ \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx \ \Rightarrow\ u=\cos x \ \Rightarrow\ du=-\sin x\,dx \ \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx=\int \frac{\sin x}{\sqrt{u}}\,\frac{du}{-\sin x}=-\int \frac{du}{\sqrt{u}}=-\int u^{\frac{-1}{2}}du=-2\sqrt{u}+c$$
$$=-2\sqrt{\cos x}+c$$

$$(b)\int x\sqrt{x-5}\ dx \quad\Rightarrow\quad u=x-5 \quad\Rightarrow\ du=dx$$

$$\Rightarrow\ \int x\sqrt{x-5}\ dx=\int x\sqrt{u}\ du\ \Rightarrow\ x\ \text{باقی ماند}$$

همون طور که می بینید x در انتگرال باقی موند و خط نخورد بنابراین باید یه فکری به حالش بکنیم چون انتگرال باید فقط بر حسب u در بیاد بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم:

$$u=x-5\ \Rightarrow x=u+5$$

با جایگزینی این عبارت در انتگرال بالا داریم:

$$\Rightarrow\ \int x\sqrt{u}\,du=\int(u+5)\sqrt{u}\,du=\int(u+5)u^{\frac{1}{2}}\,du=\int(u^{\frac{3}{2}}+5u^{\frac{1}{2}})\,du$$
$$=\frac{2}{5}\,u^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}\,u^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{5}(x-5)^{\frac{5}{2}}+\frac{10}{3}\ (x-5)^{\frac{3}{2}}+c$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5}+\frac{10}{3}\sqrt{(x-5)^3}+c$$

توجه کنید در انتگرال های بعدی اگه لازم باشه x رو بر حسب u بدست بیاریم همون قدم اول این کار رو انجام میدیم.

$$(c)\int \frac{x}{(x+1)^2}dx \quad \Rightarrow u = x+1 \quad \Rightarrow \quad du = dx \quad , x = u-1$$

$$\Rightarrow \int \frac{u-1}{u^2}\,du = \int \left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)du = \int \frac{1}{u}\,du - \int \frac{1}{u^2}du = Ln\,|u| - \left(\frac{-1}{u}\right)+c$$

$$= Ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + c$$

$$(d)\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \Rightarrow u = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow dx = 2\sqrt{x}\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin u}{\sqrt{x}}\,2\sqrt{x}\,du = 2\int \sin u\,du = -2\cos u + c = -2\cos\sqrt{x} + c$$

دقت کنید در این مسئله اگر عبارت زیر رادیکال (یعنیx) رو برابر u می گرفتیم به همون انتگرال اولیه می رسیدیم.

$$(e)\int \frac{Ln\,x}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad u = Ln\,x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x}\,dx \quad \Rightarrow \quad dx = x\,du$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{Ln\,x}{x}\,dx = \int \frac{u}{x}\,x\,du = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{(Ln\,x)^2}{2} + c$$

قلق مهم: معمولا اگر توی انتگرال $Ln\,x$ داشتیم تغییر متغیر رو برابر $u = Ln\,x$ می گیریم.

$$(f)\int \frac{1}{x\,Ln\,x}\,dx \quad \Rightarrow u = Lnx \quad \Rightarrow \quad du = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow dx = x\,du$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x\,Ln\,x}\,dx = \int \frac{1}{x.u}\,x\,du = \int \frac{du}{u} = Ln|u| + c = Ln|Ln\,x| + c$$

این انتگراله خیلی مهمه و زیاد سر و کلش تو امتحانها پیدا میشه!

$$(g)\ \int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx \quad \Rightarrow \quad u=2x+1\ , \qquad 2x+3=u+2$$

$$\Rightarrow \quad du=2dx \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx=\int \frac{u+2}{u}\,\frac{du}{2}=\frac{1}{2}\int \left(1+\frac{2}{u}\right)du=\frac{1}{2}\int du+\frac{1}{2}\int \frac{2}{u}\,du=$$

$$=\frac{u}{2}+\ Ln|u|+c=\frac{2x+1}{2}+Ln|2x+1|+c$$

آقا اجازه: نمیشه صورت انتگرال رو برابر u بگیریم؟

استاد: چرا میشه اما حل انتگرال یکم مشکلتر میشه

$$(h)\int \frac{sin\,2x}{1+sin^2x}\,dx \quad \Rightarrow u=1+sin^2x \quad \Rightarrow du=2\,sin\,x\,cos\,x\,dx=sin\,2x\,dx$$

$$\Rightarrow \quad dx=\frac{du}{\sin 2x} \quad \Rightarrow \int \frac{\sin 2x}{1+sin^2x}\,dx=\int \frac{\sin 2x}{u}\,\frac{du}{\sin 2x}=\int \frac{du}{u}=Ln|u|+c$$

$$=Ln|1+sin^2x|+c$$

$$(i)\int cos^2x\sin x\,dx \quad \Rightarrow \quad u=\cos x \quad \Rightarrow du=-\sin x\,dx \quad \Rightarrow dx=\frac{du}{-\sin x}$$

$$\Rightarrow \int cos^2x\,.\sin x\,dx=\int u^2.\sin x\,\frac{du}{-\sin x}=-\int u^2\,du=-\frac{u^3}{3}+c$$

$$=-cos^3x+c$$

نگاهی عمیق تر به روش تغییر متغیر

تا اینجای کار با کمک قلق هایی که یاد گرفتیم انتگرال های داده شده را به سادگی از روش تغییر متغیر حل کردیم. اما واقعیت اینه که در برخی از مسائل این روشها ممکنه جوابگو نباشه و برای حل انتگرال ها باید یه مقداری ابتکار عمل به خرج برید بنابراین در این قسمت برخی از این نوع مسائل رو با هم حل می کنیم.

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\int \tan x\ \ dx \qquad (b)\int \cot x\, dx \qquad (c)\int sin^2\, x\ dx$$

$$(d)\int \sec x\ \ dx \qquad (e)\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} \qquad (f)\int \frac{dx}{1+\cos x}$$

حل:

$$(a)\int tan\, x\ \ dx = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} dx \quad \Rightarrow \quad u = cos\, x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-du}{\sin x}$$

$$\int \frac{sin\, x}{cos\, x} dx = \int \frac{\sin x}{u}\ \frac{-du}{\sin x} = -\int \frac{du}{u} = -Ln\ |u| = -Ln|\cos x| = Ln|\sec x| + c$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا ابتدا تانژانت را به صورت سینوس به روی کسینوس نوشته سپس مخرج کسر را برابر متغیر جدید گرفتیم.

$$(b)\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx \quad \Rightarrow \quad u = \sin x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{\cos x}{u}\ \frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{u} = Ln|u| = Ln|\sin x| + c$$

تذکر مهم: دو تا انتگرال بالا خیلی مهم هستند سعی کنید اونا رو خوب یاد بگیرید

برای حل انتگرال(c) باید ابتدا کاری کنیم تا توان۲ سینوس از بین بره بنابراین اون رو بر حسب $\cos 2x$ می نویسیم

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

$$(c)\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx$$

برای حل انتگرال $\cos 2x$ از روش تغییر متغیر به صورت زیر استفاده می کنیم:

$$\int \cos 2x\ dx \quad \Rightarrow u = 2x \ \Rightarrow \ dx = \frac{du}{2} \ \Rightarrow \int \cos 2x\ dx = \int \cos u\ \frac{du}{2}$$

$$= \frac{\sin u}{2} + c = \frac{\sin 2x}{2} + c$$

بنابراین انتگرال اصلی به صورت زیر در میاد:

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c$$

به همین صورت برای انتگرال کسینوس ۲ داریم:

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\ dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$$

حالت کلی تر انتگرال های بالا رو در فصلهای بعدی می خونیم

این دوتا انتگرال رو حفظ کنید ضرر نمی کنید !!

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x - \sin x \,.\cos x)$$

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} = \frac{1}{2}(x + \sin x \,.\cos x)$$

انتگرال(d) یعنی انتگرال سکانت یکی از جالبترین انتگرال هایی هست که در این کتاب باهاش آشنا می شیم در کتاب **انتگرال خور** این مسئله رو از چندین روش حل می کنیم در این فصل روش تغییر متغیر رو با هم کار می کنیم که البته تا حدودی ابتکاری هست.

$$(d)\int \sec x\ dx=\int \sec x.\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\ dx \quad \Rightarrow \quad u=\sec x+\tan x$$

$$\Rightarrow\ du=(\sec x.\tan x+sec^2x)dx=\sec x(\sec x+\tan x)dx$$

$$\Rightarrow\ dx=\frac{du}{\sec x(\sec x+\tan x)}=\frac{du}{\sec x.u}$$

$$\Rightarrow\int \sec x.\frac{\sec x+\tan x}{\sec x+\tan x}\ dx=\int \sec x.\frac{u}{u}\frac{du}{\sec x.u}=\int\frac{du}{u}=Ln|u|$$

$$=Ln|\sec x+\tan x|+c$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(\sec x+\tan x)$ ضرب و تقسیم کرده سپس از روش تغییر متغیر استفاده کردیم.

به همین صورت برای محاسبه انتگرال کسکانت تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(\csc x+\cot x)$ ضرب و تقسیم کرده و از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم.

$$\int \sec x\ dx=Ln|\sec x+\tan x|+c$$

$$\int \csc x\ dx=Ln|\csc x+\cot x|+c$$

$$(e)\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}\ \Rightarrow\ u=e^{2x}-1\ \Rightarrow\ du=2e^{2x}dx\ \Rightarrow dx=\frac{du}{2e^{2x}}=\frac{du}{2(u+1)}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=\int\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{du}{2(u+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{du}{\sqrt{u}(u+1)}\quad\Rightarrow ????$$

تذکر مهم: همونطور که می بینید اگر طبق روال قبل عبارت زیر رادیکال رو برابر متغیر جدید بگیریم انتگرالی که بدست میاد از انتگرال اولیه پیچیده تر میشه بنابراین این قلق در اینجا جواب نمیده

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}(1-e^{-2x})}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} \quad \Rightarrow\ u = e^{-x}$$

$$\Rightarrow\ du = -e^{-x}\,dx \ \Rightarrow dx = -\frac{du}{e^{-x}} = -\frac{du}{u}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = \int \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{1-e^{-2x}}} = -\int \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{u} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = -\sin^{-1}u + c$$

$$\Rightarrow\ \int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} = -\,sin^{-1}\,e^{-x} + c$$

همونطور که دیدید حل انتگرال بالا حالت ابتکاری داشت و مشابه مسائل قبل نبود بنابراین همیشه به نکات و قلق ها به چشم ابزاری نگاه کنید که می تونن در حل مسائل به شما کمک کنن نه اینکه مسائل رو برای شما حل کنن!!

$$(f)\int \frac{dx}{1+\cos x} = \int \frac{1}{1+\cos x}.\frac{1-\cos x}{1-\cos x}\ dx = \int \frac{1-\cos x}{1-cos^2x}dx$$

$$= \int \frac{1-\cos x}{sin^2x}dx = \int \frac{dx}{sin^2x} - \int \frac{\cos x}{sin^2x}\ dx = -\cot x + \csc x + c$$

دقت کنید برای حل انتگرال بالا تابع جلوی انتگرال رو در عبارت $(1-\cos x)$ ضرب و تقسیم کردیم.

تذکر مهم: تجربه نشون داده که مشکل اکثر بچه ها ضعف در ریاضیات پایه هست که باعث میشه دانش آموزا و دانشجوها نتونن مسائل رو درست و سالم حل کنن و اکثر موارد با اشتباهات پیش پا افتاده کار رو خراب می کنن!! یادم میاد زمان دانشجویی که توی کلاس کنکور حساب دیفرانسیل درس می دادم وقتی بچه ها تست های حد و مشتق رو حل میکردن در مرحله آخر که باید با یه فاکتورگیری یا تجزیه ساده جواب رو بدست می آوردن به مشکل بر می خوردن!! بنابراین مباحثی مانند اتحادها، تجزیه و فاکتورگیری، معادله خط، نامساوی ها و ... رو جدی بگیرید و سعی کنید خوب بر اونها مسلط بشید.

انتگرال های تعمیم یافته

در دروس پایه ریاضی مثل ریاضیات عمومی ۱ و۲ روش حل انتگرال معمولا جزء اصلی مسئله محسوب می شه و نمره زیادی داره اما در دروس پیشرفته تر مثل معادلات دیفرانسیل و ریاضیات مهندسی بعضا حل انتگرال قسمت فرعی مسئله هستش بنابراین هر چه زودتر بشه به جواب رسید بهتره!! در این بخش ما با استفاده از روش تغییر متغیر و به کار بردن هوشمندانه فرمولهای مشتق یکسری از روابط میانبر برای انتگرال های پر کاربرد بدست میاریم و در مراحل بعدی از این روابط برای حل سریعتر انتگرال ها استفاده می کنیم.

تذکر مهم: همه روابط و مسائل این بخش از روش تغییر متغیر به راحتی اثبات میشن.

دانشجوهای گل ریاضی ۱ و۲ توجه داشته باشن که استفاده از این فرمولها در امتحان منوط به اجازه کتبی از استاد موبوطه می باشد!!!

انتگرال های نمایی تعمیم یافته

طبق روال معمول اول چند تا رابطه از مشتق رو یادآوری می کنم

یادآوری۶

$$y = e^{f(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x).\,e^{f(x)}$$

یک حالت خاص مهم:

$$y = e^{kx} \quad \Rightarrow \quad y' = k.\,e^{kx}$$

به عنوان مثال:

$$y = e^{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = \cos x\,.\,e^{\sin x}$$

$$y = e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad y' = 2x.\,e^{x^2}$$

اکنون با توجه به یادآوری بالا می تونیم بنویسیم:

$$\int f'(x)e^{f(x)}dx = e^{f(x)} + c$$

یعنی اگر انتگرال تابع $e^{f(x)}$ به ما داده شده باشد اول نگاه می کنیم که آیا مشتق $f(x)$ یعنی $f'(x)$ در جلوی انتگرال وجود دارد یا نه؟ به عنوان مثال:

$$\int 2x.e^{x^2}dx \quad \Rightarrow f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x \quad \Rightarrow \int 2x.e^{x^2}dx = e^{x^2} + c$$

حالا به مثال زیر خوب نگاه کنید:

$$\int x^2.e^{2x^3}dx \quad \Rightarrow f(x) = 2x^3 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x^2$$

همونطور که ملاحظه می کنید در جلوی تابع e^{2x^3} عبارت x^2 وجود داره نه $6x^2$، پس برای ساختن $6x^2$ یه کلک ساده می زنیم:

$$x^2 = \left(\frac{1}{6}\right)6x^2$$

حالا $\frac{1}{6}$ را چون عدد ثابته از انتگرال بیرون می یاریم و انتگرال رو به صورت زیر می نویسیم:

$$\int x^2.e^{2x^3}dx = \frac{1}{6}\int 6x^2.e^{2x^3}\,dx = \frac{1}{6}\left(e^{2x^3}\right) = \frac{e^{2x^3}}{6} + c$$

توجه: **در انتگرال گیری از این ایده خیلی استفاده می کنیم.**

یک حالت خاص زمانی هست که توان عدد نپر به صورت kx باشد(k عدد ثابت) در این حالت فرمول بالا به صورت زیر در می آید:

$$\int e^{kx}\,dx = \frac{1}{k}e^{kx} + c$$

به عنوان مثال:

$$\int e^{5x}dx \quad \Rightarrow k = 5 \quad \Rightarrow \int e^{5x}dx = \frac{1}{5}e^{5x} + c$$

$$\int e^{\frac{x}{2}}\,dx \quad \Rightarrow k = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \int e^{\frac{x}{2}}\,dx = 2\,e^{\frac{x}{2}} + c$$

از فرمول بالا در دروس معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی خیلی استفاده می کنیم.

یه مثال دیگه:

$$\int \frac{e^{\tan x}}{cos^2x}\,dx = \int (1+\tan^2 x)e^{\tan x}dx \;\Rightarrow\; f(x) = \tan x$$

$$f'(x) = 1 + tan^2x \quad \Rightarrow \int (1+\tan^2 x)e^{\tan x}dx = e^{\tan x} + c$$

آقا اجازه ؟ چرا به جای $\frac{1}{cos^2(x)}$ گذاشتی $1 + tan^2(x)$

استاد: واقعا که!!! وقتی سر کلاس به جای درس گوش دادن یواشکی با موبایلت چت می کنی نتیجه از این بهتر نمی شه!!!

حفظ کردن این دو تا رابطه از نون شب واجب تره!

$$1 + tan^2(x) = sec^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

$$1 + cot^2(x) = csc^2(x) = \frac{1}{sin^2(x)}$$

انتگرال های لگاریتمی تعمیم یافته

حتما از مبحث مشتق فرمول مهم زیر خاطرتون هست:

یادآوری ۷

$$y = Ln\, f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

به عنوان مثال:

$$y = Ln(1+x^2) \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$y = Ln\ |\sin x| \qquad \Rightarrow \quad y' = \frac{cos\, x}{sin\, x} = cot\, x$$

اکنون با توجه به فرمول بالا انتگرال زیر را می نویسیم:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\, dx = Ln|f(x)| + c$$

تذکر: انتگرال بالا خیلی خیلی مهم هست (بخصوص برای درس معادلات دیفرانسیل) بنابراین به مثالهایی که می زنم خوب دقت کنید

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\int \frac{1}{x+5}\, dx \qquad (b)\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx \qquad (c)\int \frac{1}{2x+1} dx \qquad (d)\int \frac{dx}{x.Ln\, x}$$

$$(e)\int tan\, x\, dx \qquad (f)\int \cot x\, dx \qquad (g)\int \frac{sec^2 x}{\tan x} dx \qquad (h)\int \frac{e^x}{1+e^x}\, dx$$

$$(a)\int \frac{1}{x+5}\,dx \quad \Rightarrow f = x+5 \quad \Rightarrow \quad f' = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x+5} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{x+5}\,dx = Ln|x+5| + c$$

$$(b)\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \;\Rightarrow\; f = 1+x^2 \quad \Rightarrow\; f' = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{2x}{1+x^2} = \frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow \int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = Ln|1+x^2| + c$$

تذکر: انتگرال بالا رو می تونید خیلی راحت از روش تغییر متغیر حل کنید.

$$(c)\int \frac{1}{2x+1}dx \quad \Rightarrow f = 2x+1 \quad \Rightarrow \quad f' = 2$$

همونطور که می بینید برای اینکه انتگرال بالا به شکل $\frac{f'}{f}$ در بیاد باید در صورت انتگرال عدد ۲ وجود داشته باشه بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم: (قبلا هم از این ایده استفاده کردیم یادتون که نرفته؟)

$$\Rightarrow \int \frac{1}{2x+1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}.2}{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2x+1}dx = \frac{1}{2}\,Ln|2x+1| + c$$

$$(d)\int \frac{dx}{x.Ln\,x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{Ln\,x}\,dx \;\Rightarrow\; f = Ln\,x \;\Rightarrow\; f' = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \frac{f'}{f} = \frac{\frac{1}{x}}{Ln\,x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x.Ln\,x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{Ln\,x}\,dx = Ln|Ln\,x| + c$$

این انتگرال رو قبلا از روش تغییر متغیر هم حل کردیم.

$$(e)\int tan\,x\,dx=\int\frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx\ \Rightarrow f=cos\,x\ \Rightarrow\ f'=-\,sin\,x$$

$$\Rightarrow\int tan\,x\,dx=\int\frac{sin\,x}{cos\,x}\,dx=-\int\frac{-\sin x}{\cos x}\,dx=-Ln|\cos x|+c$$

$$=Ln\left|\frac{1}{\cos x}\right|+c=Ln|\sec x|+c$$

$$(f)\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx\ \Rightarrow f=\sin x\ \ \Rightarrow\ f'=\cos x\ \Rightarrow\ \frac{\cos x}{\sin x}=\frac{f'}{f}$$

$$\Rightarrow\int\cot x\,dx=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,dx=Ln|\sin x|+c$$

نکته مهم: یه نصیحت می کنم سعی کنید در تمامی مراحل زندگی یادتون باشه!

هرگاه با یک انتگرال کسری مواجه شدید اول به مخرج کسر نگاه کنید، اگر مشتق مخرج توی صورت بود با خیال راحت از فرمول بالا استفاده کنید

$$(g)\int\frac{sec^2x}{\tan x}dx=\int\frac{1+tan^2x}{\tan x}\,dx\ \Rightarrow\ f=\tan x\ \ \Rightarrow\ f'=1+tan^2x$$

$$\Rightarrow\int\frac{sec^2x}{\tan x}dx=Ln|\tan x|+c$$

$$(h)\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx\ \Rightarrow\ f=1+e^x\ \Rightarrow\ f'=e^x$$

$$\Rightarrow\int\frac{e^x}{1+e^x}\,dx=Ln|1+e^x|+c$$

انتگرال رادیکالی تعمیم یافته

یادآوری از مشتق:

یادآوری ۸

$$y = \sqrt{f(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

به عنوان مثال داریم:

$$y = \sqrt{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$y = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

اکنون با توجه به فرمول بالا می توانیم انتگرال زیر را بنویسیم:

$$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}\,dx = 2\sqrt{f(x)} + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx \qquad (b) \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \qquad (c) \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx \;\Rightarrow\; f = \sin x \;\Rightarrow\; f' = \cos x \;\Rightarrow \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\Rightarrow \int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx = 2\sqrt{\sin x} + c$$

$$(b)\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \ \Rightarrow\ f = x \ \Rightarrow\ f' = 1 \ \Rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{f'}{\sqrt{f}}$$

$$\Rightarrow\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{x} + c$$

انتگرال بالا خیلی مهمه من جای شما بودم حفظش می کردم!

$$(c)\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{1+x^2}+c\right) = \sqrt{1+x^2}+c$$

انتگرال کسری تعمیم یافته

یادآوری از مشتق:

یادآوری ۹

$$y = \frac{1}{f(x)} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-f'}{f^2}$$

فرمول بالا رو می تونید خیلی راحت از رابطه مشتق کسر اثبات کنید.

به عنوان مثال:

$$y = \frac{1}{\sin x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-\cos x}{sin^2 x}$$

$$y = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{x^2}$$

$$y = \frac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{\sin x}{cos^2 x} = \sec x\,.\tan x$$

و اما انتگرال کسری

$$\int \frac{f'}{f^2}\, dx = \frac{-1}{f} + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \frac{1}{(1+x)^2}\, dx \quad (b) \int sec^2 x . \sin x \; dx \quad (c) \int \frac{1}{x^2} dx$$

حل:

$$(a) \int \frac{1}{(1+x)^2}\, dx \quad \Rightarrow f = 1 + x \quad \Rightarrow \quad f' = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{f'}{f^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{(1+x)^2}\, dx = \frac{-1}{1+x} + c$$

$$(b) \int sec^2 x . \sin x \; dx = \int \frac{\sin x}{cos^2 x} dx \quad \Rightarrow f = \cos x \quad \Rightarrow f' = -\sin x$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sin x}{cos^2 x} dx = -\int \frac{-\sin x}{cos^2 x} dx = -\left(\frac{-1}{\cos x}\right) + c = \frac{1}{\cos x} + c = \sec x + c$$

دقت کنید وقتی یکم حرفه شدید دیگه نیازی نیست f و f' رو مشخص کنید و می تونید مستقیما جواب رو بدست بیارید.

<u>تذکر</u>:باز هم تاکید می کنم انتگرال بالا رو میشه از روش تغییر متغیر هم حل کرد.

$$(c) \int \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow f = x \quad \Rightarrow \quad f' = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{f'}{f^2} \Rightarrow \quad \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-1}{x} + c$$

این انتگرال به نظرتون آشنا نیست؟؟؟؟

انتگرال های تعمیم یافته مثلثاتی

یادآوری از مشتق

یادآوری ۱۰

$$y = \sin f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x).\cos f(x)$$

$$y = \cos f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = -f'(x).\sin f(x)$$

$$y = \tan f(x) \quad \Rightarrow \quad y' = f'(x)(\,1 + tan^2 f(x))$$

به عنوان مثال:

$$y = \sin(x^2 + 3x) \quad \Rightarrow \quad y' = (2x + 3).\cos(x^2 + 3x)$$

$$y = \cos\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{-1}{2\sqrt{x}} \sin\sqrt{x}$$

$$y = \tan\frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\frac{x}{2}\right)$$

اکنون با توجه به فرمولهای گفته شده انتگرال های زیر رو داریم:

$$\int f'(x)\, cos\, f(x)\, dx = sin\, f(x) + c$$

$$\int f'(x)\, sin\, f(x)\, dx = -cos\, f(x) + c$$

$$\int f'(x)\big(\,1 + tan^2 f(x)\big)dx = \tan f(x) + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a)\int 3x^2 \cos x^3\ \ dx \qquad (b)\int \sin(5x+2)dx \qquad (c)\ \int \left(1+tan^2\frac{x}{2}\right)dx$$

حل:

$$(a)\int 3x^2 \cos x^3\ \ dx \ \ \Rightarrow f = x^3 \quad \Rightarrow\ f' = 3x^2$$

$$\Rightarrow\ \int 3x^2\, cos\, x^3\ \ dx = sin\, x^3 + c$$

$$(b)\int \sin(5x+2)dx \quad \Rightarrow f = 5x+2 \quad \Rightarrow\ \ f' = \ 5$$

$$\Rightarrow \int \sin(5x+2)\, dx = \frac{1}{5}\int 5\sin(5x+2)dx = \frac{1}{5}\ (-\cos(5x+2)) + c$$
$$= \frac{-\cos(5x+2)}{5} + c$$

$$(c)\int \left(1+tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow f = \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad f' = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\ \ \int \left(1+tan^2\frac{x}{2}\right)dx = 2\int \frac{1}{2}\left(1+tan^2\frac{x}{2}\right)dx = 2\tan\frac{x}{2} + c$$

یک حالت خاص مهم برای فرمولهای بالا زمانی است که داشته باشیم $f = kx$ بنابراین $f' = k$ در این حالت فرمولهای بالا به صورت زیر ساده می شوند: (این فرمولها در درس ریاضیات مهندسی استفاده زیادی داره)

$$\int \cos kx\, dx = \frac{1}{k} \sin kx + c$$

$$\int \sin kx\, dx = \frac{-1}{k} \cos kx + c$$

$$\int (1 + \tan^2 kx) dx = \frac{1}{k} \tan kx + c$$

مثال: مطلوبست حل انتگرال های زیر:

$$(a) \int \cos 5x\, dx \qquad (b) \int \sin \pi x\, dx \qquad (c) \int \cos \frac{3x}{2}\, dx$$

$$(d) \int \sin \frac{x}{2} dx \qquad (e) \int \cos \frac{\pi x}{L}\, dx \qquad (f) \int \sin x \,.\cos x\, dx$$

حل:

$$(a) \int \cos 5x\, dx = \frac{1}{5} \sin 5x + c$$

$$(b) \int \sin \pi x\, dx = \frac{-1}{\pi} \cos \pi x + c$$

$$(c) \int \cos \frac{3x}{2}\, dx = \frac{1}{\frac{3}{2}} \sin \frac{3x}{2} + c = \frac{2}{3} \sin \frac{3x}{2} + c$$

$$(d) \int \sin \frac{x}{2} dx = -2 \cos \frac{x}{2} + c$$

$$(e) \int \cos \frac{\pi x}{L}\, dx = \frac{L}{\pi} \sin \frac{\pi x}{L} + c$$

$$(f) \int \sin x \,.\cos x\, dx = \frac{1}{2} \int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2} \left(\frac{-1}{2} \cos 2x + c \right)$$

$$= \frac{-1}{4} \cos 2x + c$$

مسائل فصل دوم

۱ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

(1) $\int sec^2x.e^{tanx}\,dx$

(2) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx$

(3) $\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$

(4) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\,dx$

(5) $\int \frac{2x+1}{x+5}dx$

(6) $\int \frac{dx}{e^x-1}$

(7) $\int \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}\,dx$

(8) $\int \frac{1+Ln\,x}{3+x.Ln\,x}\,dx$

(9) $\int x\sqrt{x-1}\,\,dx$

(10) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

۲ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

(1) $\int \sqrt[3]{8x^5+32x^3}\,dx$

(2) $\int \frac{1-2x}{5+x}\,dx$

(3) $\int \frac{x^2}{5+x^6}dx$

(4) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$

(5) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^4}}dx$

(6) $\int \frac{\cos x}{4+sin^2x}dx$

(7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$

(8) $\int \frac{dx}{\sin x\,.\cos x}$

(9) $\int \frac{dx}{1+cos^2x}$

(10) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$

فصل سوم : تغییر متغیرهای مثلثاتی

همانطور که در فصل قبل دیدیم برخی از انتگرال ها با استفاده از تغییر متغیرهای معمول قابل حل نیستند به عنوان مثال فرض کنید محاسبه انتگرال زیر خواسته شده باشد:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx}$$

اگر طبق روال معمول عبارت زیر رادیکال رابرابر u بگیریم داریم:

$$u = 1-x^2 \;\;\Rightarrow\;\; du = -2x\,dx \;\;\Rightarrow\;\; dx = -\frac{du}{2x}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{\mathrm{u}}\,\left(-\frac{du}{2x}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{u}}{x}\,du$$

چون x از انتگرال ساده نشد باید آن را بر حسب u بنویسیم.

$$u = 1-x^2 \;\;\Rightarrow\;\; x = \sqrt{1-u}$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{u}}{x}\,du = -\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{1-u}}\,du$$

همانطور که می بینید محاسبه انتگرال بالا از انتگرال اولیه هم مشکلتر شد بنابراین این روش در اینجا کارساز نیست به همین دلیل برای محاسبه اینگونه انتگرال ها از تغییر متغیر های مثلثاتی استفاده می کنیم. انتگرالهایی که با استفاده از این روش حل می شوند به سه دسته کلی تقسیم می شوند که عبارتند از:

الف) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2-x^2}$

ب) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2+x^2}$ **یا** $\frac{1}{x^2+\mathrm{a}^2}$

ج) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2-\mathrm{a}^2}$

که در ادامه به توضیح هر یک از موارد بالا می پردازیم.

الف) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$

این انتگرال ها را اغلب می توان با جانشینی $x = a\sin\theta$ به صورت زیر حل کرد:

$$x = a\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sin^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sin^2\theta)} = \sqrt{a^2 cos^2\theta}$$
$$= a\cos\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

مثال: انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}}$$

حل:

$$\sqrt{16 - x^2} = \sqrt{4^2 - x^2} \quad \Rightarrow a = 4 \quad \Rightarrow x = 4\,sin\,\theta \quad \Rightarrow dx = 4\,cos\,\theta\; d\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{16 - 16 sin^2\theta} = 4\cos\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16 - \mathrm{x}^2}} = \int \frac{4\cos\theta\; d\theta}{4\cos\theta} = \int d\theta = \theta + c$$

ملاحظه می کنید که جواب آخر بر حسب θ در آمد که باید آن را بر حسب x بنویسیم بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم:

$$x = 4\,sin\,\theta \quad \Rightarrow \; sin\,\theta = \frac{x}{4} \quad \Rightarrow \; \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{16 - x^2}} = sin^{-1}\left(\frac{x}{4}\right) + c$$

تذکر: دقت کنید انتگرال بالا را می توان از روابط فصل اول به صورت مستقیم حل کرد.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9 - x^2)^3}}$$

$$x = 3\sin\theta \quad \Rightarrow dx = 3\cos\theta \, d\theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{(9-x^2)^3} = (9-x^2)^{\frac{3}{2}} = (9-9sin^2\theta)^{\frac{3}{2}} = (3^2cos^2\theta)^{\frac{3}{2}} = 27cos^3\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \int \frac{3\cos\theta}{27cos^3\theta}\, d\theta = \frac{1}{9}\int \frac{d\theta}{cos^2\theta} = \frac{1}{9}\int (1+tan^2\theta)\, d\theta = \frac{1}{9}\tan\theta$$

برای نوشتن جواب آخر برحسب x به ترتیب زیر عمل می کنیم:

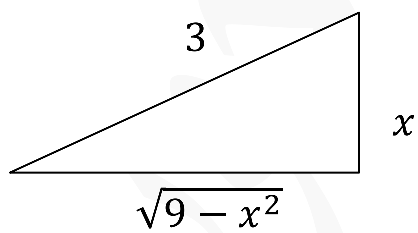
ابتدا $\sin\theta$ را بر حسب x می نویسیم:

$$x = 3\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{x}{3}$$

سپس مثلث قائم الزاویه ای رسم کرده و اضلاع آن را طوری نام گذاری می کنیم که سینوس آن برابر $\frac{x}{3}$ شود.

$$\sin\theta = \frac{\text{ضلع روبرو}}{\text{وتر}} = \frac{x}{3}$$

بنابراین ضلع روبرو را برابر x و وتر را برابر 3 قرار می دهیم پس طبق قضیه فیثاغورث ضلع مجاور برابر $\sqrt{9-x^2}$ می شود و مثلث مورد نظر به شکل زیر در می آید.



اکنون با توجه به مثلث بالا به آسانی می توانیم $\tan\theta$ را بدست آوریم.

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}} = \frac{1}{9}\tan\theta + C = \frac{1}{9}\frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

ب) انتگرال های شامل $\sqrt{a^2+x^2}$ یا $\dfrac{1}{x^2+a^2}$

این انتگرال ها را می توان با جانشینی $x = a\tan\theta$ به صورت زیر حل نمود.

$$x = a\tan\theta \quad \Rightarrow \quad \sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}$$
$$= \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\sec\theta \qquad -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}}$$

حل:

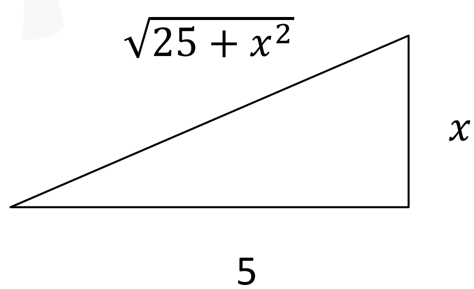
$$x = 5\tan\theta \qquad \Rightarrow \quad dx = 5\sec^2\theta\, d\theta$$

$$\sqrt{25+x^2} = \sqrt{25+25\tan^2\theta} = 5\sec\theta$$

$$\int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \ Ln|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

اکنون برای نوشتن جواب آخر بر حسب x مانند مثال قبل مثلث قائم الزاویه ای به صورت زیر رسم می کنیم:

$$x = 5\tan\theta \quad \Rightarrow \ \tan\theta = \frac{x}{5} = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{25+x^2}}{5}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{25+x^2}} = \ Ln|sec\theta + \tan\theta| + c = Ln\left|\frac{\sqrt{25+x^2}}{5} + \frac{x}{5}\right| + c =$$

$$= Ln\left|\sqrt{25+x^2} + x\right| - Ln\,5 + c = Ln\left|\sqrt{25+x^2} + x\right| + c'$$

در حالت کلی داریم:

$$\boxed{\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \mathrm{Ln}\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2}$$

حل: دقت کنید در روابط مورد استفاده در اینجا فرض شده ضریب x^2 برابر یک است بنابراین به صورت زیر عمل می کنیم:

$$1 + 4x^2 = 4\left(\frac{1}{4} + x^2\right) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{1}{2}\tan\theta \quad \Rightarrow dx = \frac{1}{2}(1 + tan^2\theta)d\theta$$

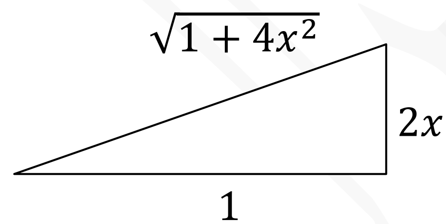
$$1 + 4x^2 = 1 + 4\left(\frac{1}{2}\tan\theta\right)^2 = 1 + tan^2\theta$$

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2} = \int \frac{\frac{1}{2}(1+tan^2\theta)d\theta}{(1+tan^2\theta)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d\theta}{(1+tan^2\theta)} =$$

$$= \frac{1}{2}\int cos^2\theta \; d\theta = \frac{1}{4}(\theta + \sin\theta \,.\cos\theta)$$

اکنون باید جواب را بر حسب x بنویسیم:

$$x = \frac{1}{2}\tan\theta \quad \Rightarrow \; \tan\theta = \frac{x}{\frac{1}{2}} = 2x$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$\sin\theta = \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}} \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}$$

همچنین برای محاسبه θ به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\tan\theta = 2x \quad \Rightarrow \quad \theta = \tan^{-1}(2x)$$

$$\int \frac{dx}{(1+4x^2)^2} = \frac{1}{4}(\theta + \sin\theta \,.\cos\theta) = \frac{1}{4}\left(\tan^{-1}(2x) + \frac{2x}{1+4x^2}\right) + c$$

ج) انتگرال های شامل $\sqrt{x^2-\mathrm{a}^2}$

در این انتگرال ها از تغییر متغیر $x = a\sec\theta$ استفاده می کنیم:

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2tan^2\theta} = a\,tan\,\theta$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}$$

حل:

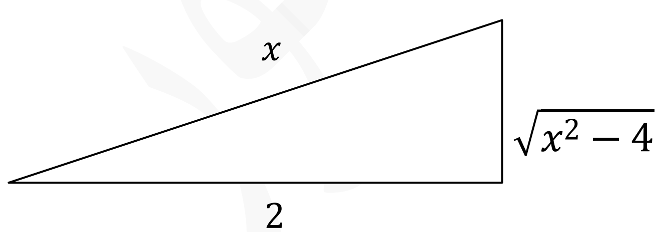
$$x = 2\sec\theta \quad \Rightarrow \quad dx = 2\sec\theta \,.\, tan\theta\; d\theta$$

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{4\mathrm{sec}^2\theta - 4} = 2\tan\theta$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{2\,sec\,\theta\,.\,tan\theta}{2\,tan\,\theta}\,d\theta = \int sec\,\theta\; d\theta = Ln|sec\theta + tan\theta| + c$$

اکنون باید جواب را بر حسب x بنویسیم:

$$x = 2\sec\theta \quad \Rightarrow \quad \sec\theta = \frac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad cos\theta = \frac{2}{x}$$



با توجه به مثلث بالا داریم:

$$tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = Ln|sec\theta + tan\theta| = Ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + c$$

البته جواب بالا را می توان به شکل ساده تر زیر هم نوشت.

$$Ln\left|\frac{x}{2} + \frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C = Ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C = Ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| - Ln2 + c$$

$$= Ln\left|x+\sqrt{x^2-4}\right| + c'$$

دقت کنید چون $Ln2$ عددی ثابت است بنابراین جمع آن با ثابت c باز هم عددی ثابت می شود.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx$$

حل:

$$x = \sec\theta \quad \Rightarrow \quad dx = \sec\theta \,.\, tan\theta\, d\theta$$

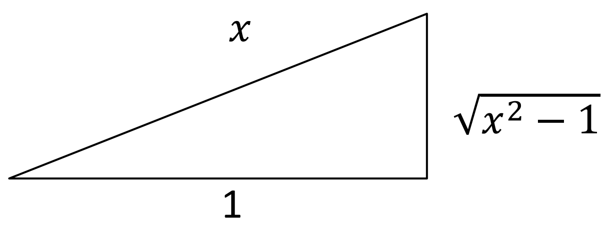
$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\sec^2\theta - 1} = \tan\theta$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx = \int \frac{\sec\theta \,.\, tan^2\theta}{\sec\theta} d\theta = \int tan^2\,\theta\, d\theta = \int (tan^2\,\theta + 1 - 1)\, d\theta$$

$$= \int (tan^2\,\theta + 1)\, d\theta - \int d\theta = tan\theta - \theta + C$$

مشابه مثالهای قبل جواب آخر را بر حسب x می نویسیم.

$$\sec\theta = x \quad \Rightarrow \quad cos\theta = \frac{1}{x}$$



$$\Rightarrow tan\theta = \sqrt{x^2-1} \quad , \qquad \theta = \sec^{-1} x$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx = tan\theta - \theta + c = \sqrt{x^2-1} - \sec^{-1} x + c$$

خب فکر می کنم تا اینجای کار مطلب رو خوب یاد گرفته باشید

آقا اجازه: ما همه رو فول شدیم دیگه هر سوالی تو امتحان بدن حل میکنیم.

استاد: شرمنده اخلاق ورزشیت توی امتحان که از این سوالای آبکی نمیدن که شما راحت حلش کنید اینطوری که همه میگن استاده کلاییه!!

آقا اجازه : پس چه سوالایی می دن؟

استاد: بالاخره یه جوری می پیچونن، چندتا مثال می زنم اوضاع دستتون بیاد.

مثال:مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$$

حل:

همانطور که می بینید عبارت زیر رادیکال به شکل استاندارد a^2-u^2 یا $u^2-\mathrm{a}^2$ نیست بنابراین آن را به شکل استاندارد می نویسیم:

$$2x - x^2 = 2x - x^2 - 1 + 1 = -(x^2 - 2x + 1) + 1 = -(x-1)^2 + 1$$
$$= 1 - (x-1)^2$$

اکنون از تغییر متغیر $u = x - 1$ استفاده می کنیم:

$$u = x - 1 \quad \Rightarrow du = dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}$$

ملاحظه می کنیم که انتگرال به شکل استاندارد در آمد بنابراین با استفاده از تغییر متغیر $u = sin\,\theta$ داریم.

$$u = \sin\theta \quad \Rightarrow \quad du = \cos\theta \ d\theta \quad , \qquad \sqrt{1 - u^2} = \sqrt{1 - sin^2\theta} = cos\theta$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{cos\,\theta \ d\theta}{cos\,\theta} = \int d\theta = \theta = sin^{-1} u = sin^{-1}(x - 1) + c$$

مثال:مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$$

حل:

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 - 2x + 1 + 1 = (x - 1)^2 + 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}}$$

اکنون مشابه مثال قبل از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم تا انتگرال به شکل استاندارد در آید.

$$u = x - 1 \quad \Rightarrow du = dx \quad x = u + 1$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(x - 1)^2 + 1}} = \int \frac{(u + 1)\,du}{\sqrt{u^2 + 1}}$$

اکنون می توانیم از تغییر متغیر $u = \tan\theta$ استفاده کنیم.

$$u = tan\theta \quad \Rightarrow du = (1 + tan^2\theta)d\theta = sec^2\theta\ d\theta$$

$$\sqrt{u^2+1} = \sqrt{(1+tan^2\theta)} = \sqrt{sec^2\theta} = sec\theta$$

$$\int \frac{(u+1)\ du}{\sqrt{u^2+1}} = \int \frac{(1+tan\theta)sec^2\theta\ d\theta}{sec\theta} = \int (1+tan\theta)sec\theta\ d\theta =$$

$$\int sec\theta\ d\theta + \int tan\theta . sec\theta\ d\theta = Ln|sec\theta + tan\theta| + sec\theta + C$$

اکنون جواب را بر حسب u می نویسیم(مثلث رو خودتون بکشین)

$$u = tan\theta \ \Rightarrow\ sec\theta = \sqrt{u^2+1}$$

$$\int \frac{(u+1)\ du}{\sqrt{u^2+1}} = Ln|sec\theta + tan\theta| + sec\theta = Ln\left|\sqrt{u^2+1} + u\right| + \sqrt{u^2+1}$$
$$= Ln\left|\sqrt{(x-1)^2+1} + (x-1)\right| + \sqrt{(x-1)^2+1} + c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{(4x^2+4x+5)^2}$$

حل:

ابتدا مخرج انتگرال را به صورت استاندارد می نویسیم.

$$4x^2 + 4x + 5 = (2x+1)^2 + 4$$

سپس از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$u = 2x + 1 \quad \Rightarrow du = 2dx \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{2}$$

$$\int \frac{dx}{(4x^2+4x+5)^2} = \int \frac{dx}{((2x+1)^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2+4)^2}$$

در مرحله آخر از تغییر متغیر مثلثاتی استفاده می کنیم.

$$u = 2tan\theta \quad \Rightarrow \quad du = 2(1 + tan^2\theta)d\theta = 2sec^2\theta\, d\theta$$

$$u^2 + 4 = 4(tan^2\theta + 1) = 4sec^2\theta$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{du}{(u^2+4)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2sec^2\theta}{(4sec^2\theta)^2}\, d\theta = \frac{1}{16}\int \frac{d\theta}{sec^2\theta} = \frac{1}{16}\int cos^2\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \; \frac{1}{16}\int cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{32}(\theta + \sin\theta . \cos\theta)$$

اکنون جواب را بر حسب u می نویسیم(مثلث رو خودتون بکشین)

$$u = 2tan\theta \quad \Rightarrow \; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta = \frac{u}{\sqrt{u^2+4}} \quad , \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{u^2+4}}$$

$$\frac{1}{16}\int cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{32}(\theta + \sin\theta . \cos\theta) = \frac{1}{32}\left(\tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + \frac{2u}{u^2+4}\right)$$

$$= \frac{1}{32}\left(\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right) + \frac{2(2x+1)}{u^2+4}\right) + C$$

جایگزینی $t = tan\left(\frac{x}{2}\right)$

تغییر متغیر بالا معمولا برای محاسبه انتگرالهایی به فرم زیر مورد استفاده قرار می گیرد:

$$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$$

که a,b,c اعدادی ثابت هستند.

قبل از ادامه کار روابط زیر را یادآوری می کنیم.

یادآوری !!

$$\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$$

$$\tan x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \csc x \; dx$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = Ln|t| = Ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{cos\,x} = \int \sec x\,dx$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1 + tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1 + tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,dt}{1 + t^2}$$

$$\int \frac{dx}{cos\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2}$$

برای حل انتگرال بالا باید کسر $\frac{2}{1-t^2}$ رو تفکیک کنید(اگر تفکیک کسر رو بلد نیستید نگران نباشید چون در فصل بعدی مفصلا راجع بهش صحبت می کنیم.)

$$\frac{2}{1-t^2} = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}$$

دقت کنید که اگر از سمت راست تساوی بالا مخرج مشترک بگیرید به کسر سمت چپ می رسید.

$$\int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right)dt = Ln|1+t| - Ln|1-t| = Ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$$
$$= Ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| + c$$

خب،این هم از شکل دوم جواب انتگرال سکانت.

البته معمولا در مسائل از همون شکل اول جواب، یعنی $Ln|\sec x + \tan x|$ استفاده میشه.

آقا اجازه : چرا دوتا جواب با هم فرق داره؟

استاد: فرق نداره عزیز دل برادر !! قبول نداری نگاه کن:

$$Ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| = Ln\left|\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.\frac{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)}\right| = Ln\left|\frac{\left(1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| =$$

$$= Ln\left|\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| = Ln\left|\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right|$$

اکنون با توجه به روابط یادآوری II داریم:

$$\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \tan x$$

بنابراین:

$$Ln\left|\frac{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}+\frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}\right| = Ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right| = Ln|\sec x+\tan x|$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{5+4cos\,x}$$

حل:

$$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow dt = \frac{1}{2}\left(1+tan^2\frac{x}{2}\right)dx \quad \Rightarrow dx = \frac{2\,dt}{1+tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{5+4cos\,x} = \int \frac{\frac{2\,dt}{1+t^2}}{5+4\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{t^2+9} = 2\left(\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{t}{3}\right)+c = \frac{2}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{3}\right)+c$$

مسائل فصل سوم

۱ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1)\int \frac{dx}{\sqrt{(5+2x+x^2)^3}} \qquad (2)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$$

$$(3)\int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}}dx \qquad (4)\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$$

$$(5)\int \frac{x^3dx}{\sqrt{25+x^2}} \qquad (6)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$$

$$(7)\int \frac{dx}{7-3\sin x+6\cos x} \qquad (8)\int \frac{dx}{3+2\cos x}$$

۲ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$$(1)\int \frac{\sqrt{x^2+4}}{x^2}\,dx \qquad (2)\int \frac{x^2}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx$$

$$(3)\int \frac{dx}{x\sqrt{1-3x^2}} \qquad (4)\int \frac{\sqrt{16+x^2}}{x^4}\,dx$$

$$(5)\int \frac{dx}{x^2+x+1} \qquad (6)\int \frac{x\,dx}{x^2-2x+6}$$

$$(7)\int \frac{dx}{(4x-x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (8)\int \frac{x\,dx}{(3-2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$(9)\int \frac{dx}{1+3\cos x} \qquad (10)\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$$

فصل چهارم: انتگرال گیری از کسرهای گویا

در این فصل درباره انتگرال گیری از کسرهای گویا بحث می کنیم قبل از شروع بحث بهتره یادآوری کنیم که منظور از کسر گویا کسری هست که صورت و مخرجش چندجمله ای باشد مانند: $\frac{2x}{x^2+5}$ یا $\frac{3}{5x-7}$

اما چیزی که در این فصل بیشتر راجع به اون بحث می کنیم تجزیه کسرهای گویا هستش چون وقتی کسری رو تجزیه کردید انتگرال گیری از اون مثل آب خوردنه! بنابراین اول می ریم سراغ بحث تجزیه کسرها

تجزیه کسرهای گویا

در این قسمت تجزیه کسرهای گویا را به صورت مرحله به مرحله بررسی می کنیم قبل از شروع بحث باید یادآوری کنم که منظور از تجزیه کسر این است که آن را به صورت مجموع چند کسر بنویسیم که در مخرج هر یک از آنها فقط یکی از عوامل وجود داشته باشد.

به عنوان مثال کسر $\frac{5}{(x-1)(x+2)}$ به صورت زیر تجزیه می شود (همان طور که می بینید در مخرج کسر حاصلضرب دو عامل درجه اول وجود دارد)

$$\frac{5}{(x-1)(x+2)} = \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}$$

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج (در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

در ابتدای کار فرض می کنیم که درجه صورت کسر کوچکتر از مخرج هست(در غیر اینصورت باید صورت رو بر مخرج تقسیم کنیم که بعدا بهش اشاره می کنیم) سپس صورت و مخرج کسر را تا آن جا که ممکن است به حاصلضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کرده و ساده میکنیم به عنوان مثال:

$$\frac{x^2-1}{x^3+x^2-2x} = \frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)(x+2)} = \frac{x+1}{x(x+2)}$$

مرحله دوم : تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

بعد از ساده سازی، در **مخرج** کسر سر و کله یکی از چهار عامل زیر پیدا می شود:

۱) عامل درجه اول غیر تکراری(با توان یک) مانند $(x-1)$ یا $(3x+5)$ و بطور کلی $(ax+b)$

در این حالت برای تفکیک کسر به ازای هر یک از این عاملها یک کسر به صورت $\frac{A}{ax+b}$ در سمت راست تساوی قرار می دهیم که ثابت A باید تعیین شود به عنوان مثال:

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad \Rightarrow$$ ثابتهای A,B باید تعیین شوند

$$\frac{x+2}{x^2+x}=\frac{x+2}{x(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow$$ ثابتهای A,B باید تعیین شوند

۲) عامل درجه اول تکراری(با توان بزرگتر از یک) مانند $(x+1)^3$ یا $(4x-5)^2$ بطور کلی $(ax+b)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $(ax+b)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی قرار می دهیم:

$$\frac{\mathrm{A_1}}{ax+b}+\frac{\mathrm{A_2}}{(ax+b)^2}+\cdots+\frac{\mathrm{A_n}}{(ax+b)^n}$$

که ثابتهای $\mathrm{A_1},\mathrm{A_2},\mathrm{A_3}\ldots$ باید تعیین شوند.

به عنوان مثال:

$$\frac{1}{(x+5)(x-1)^3}=\frac{A}{x+5}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$$

دقت کنید در کسر بالا $(x+5)$ عامل درجه اول غیر تکراری است بنابراین به جای آن یک کسر به صورت $\frac{A}{x+5}$ قرار می دهیم از طرفی $(x-1)^3$ یک عامل درجه اول تکراری است بنابراین به جای آن سه کسر به صورت $\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{D}{(x-1)^3}$ قرار می دهیم.

۳) عامل درجه دوم(غیر قابل تجزیه) غیر تکراری مانند x^2+3 یا بطور کلی ax^2+bx+c

در این حالت به ازای هر یک از این عاملها یک کسر به صورت $\frac{Ax+b}{ax^2+bx+c}$ در سمت راست تساوی قرار می دهیم به عنوان مثال:

$$\frac{1}{x(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+c}{1+x^2}$$

$$\frac{1}{x^2(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{(x^2+x+1)}$$

۴) عامل درجه دوم تکراری مانند $(x^2+1)^3$ یا بطور کلی $(ax^2+bx+c)^n$

در این حالت به ازای هر عامل $\left(ax^2+bx+c\right)^n$ تعداد n کسر به صورت زیر در سمت راست تساوی قرار می دهیم:

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c}+\frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

به عنوان مثال:

$$\frac{x+5}{x(x^2+1)^3}=\frac{C}{x}+\frac{A_1x+B_1}{x^2+1}+\frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2}+\frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3}$$

تذکر یک: منظور از عامل درجه دوم عاملی است که قابل تجزیه به عوامل درجه اول نباشد به عنوان مثال عبارت $x^2+3x-10$ عبارت درجه دوم محسوب نمی شود چون می توان آن را به صورت حاصلضرب دو عامل درجه اول به صورت زیر نوشت (مثلا با استفاده از اتحاد جمله مشترک)

$$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)$$

تذکر دو: عباراتی به شکل $x^2+\mathrm{a}^2$ (مثل x^2+9) تجزیه پذیر نیستند و عامل درجه دوم محسوب میشن اما عباراتی به شکل $x^2-\mathrm{a}^2$ با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می شن.

به طور کلی داریم:

$ax^2 + bx + c = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta \geq 0$ قابل تجزیه

$ax^2 + bx + c = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \Delta < 0$ غیر قابل تجزیه

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و بدست آوردن ثابتها

بعد از اینکه کسر اصلی را به صورت جمع چندین کسر نوشتیم در مرحله بعد بین کسرهای سمت راست تساوی مخرج مشترک می گیریم و صورت کسر حاصل را برابر صورت کسر اصلی قرار می دهیم.

به مثال زیر دقت کنید:

$$\frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{3x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\Rightarrow \;\; 3x-1 = A(x+1) + B(x-1)$$

اکنون در دو طرف تساوی بالا عددی دلخواه(معمولا ریشه های مخرج) را به ازای x قرار می دهیم تا ثابت های A, B بدست آیند.

$$x = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 3(1) - 1 = A(1+1) + B(1-1) \qquad \Rightarrow \qquad A = 1$$

$$x = -1 \quad \Rightarrow \quad 3(-1) - 1 = (1)(-1+1) + B(-1-1) \quad \Rightarrow \quad B = 2$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{3x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+1}$$

خلاصه مراحل تجزیه کسر:

مرحله اول: تقسیم صورت بر مخرج(در صورت نیاز) و ساده سازی کسر

مرحله دوم: تفکیک کسر و نوشتن آن به صورت مجموع چند کسر ساده

مرحله سوم: مخرج مشترک گیری و بدست آوردن ثابت ها

مثال:کسر $\frac{1}{x(1+x^2)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+c}{1+x^2} = \frac{A(1+x^2)+x(Bx+c)}{x(1+x^2)}$$

$$\Rightarrow\ 1 = A(1+x^2)+x(Bx+c)$$

دقت کنید در تساوی بالا سه مجهول داریم بنابراین باید سه عدد دلخواه به x بدهیم تا مجهولات مشخص شوند یکی از این اعداد می تواند ریشه x یعنی صفر باشد اما عامل دیگر یعنی $(1+x^2)$ ریشه حقیقی ندارد بنابراین دو عدد دلخواه مثلا ۱ و ۱- را به جای x قرار می دهیم.

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(1+0)+(0)(B(0)+c) \ \Rightarrow \ A=1$$

$$x=1 \quad \Rightarrow 1 = (1)(2)+(1)(B+c) \ \Rightarrow \ B+c=-1$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow 1 = (1)(2)+(-1)(-B+c) \ \Rightarrow \ B-c=-1$$

$$\Rightarrow \ \begin{cases} B+c=-1 \\ B-c=-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \ B=-1\,, \quad C=0$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

یک روش دیگر برای بدست آوردن مجهولات به این صورت است که پس از مساوی قرار دادن صورت کسرها طرفین رابطه را بر حسب توانهای x مرتب می کنیم:

$$\Rightarrow\ 1 = A(1+x^2) + x(Bx+c)$$

$$\Rightarrow\ \ 1 = A + Ax^2 + Bx^2 + cx = (A+B)x^2 + cx + A$$

اکنون برای بدست آوردن ثابتها، ضرایب توانهای مشابه x در دو طرف رابطه را مساوی هم قرار می دهیم یعنی:

ضریب x در طرف راست معادله = ضریب x در طرف چپ معادله

ضریب x^2 در طرف راست معادله = ضریبx^2 در طرف چپ معادله

عدد ثابت در طرف راست معادله = عدد ثابت در طرف چپ معادله

آقا اجازه: طرف چپ تساوی کهx^2 و x نداره؟

استاد: چرا داره شما نمی بینی!!!! در واقع سمت چپ تساوی رو می تونیم به صورت زیر بنویسیم:

$$0x^2 + 0x + 1 = (A+B)x^2 + cx + A$$

یعنی هر موقع توانی از x وجود نداره ضریب اون صفر بوده بنابراین

$$\begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow \quad A=1\ ,B=-1\ ,C=0$$

$$\Rightarrow\ \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

مثال: کسر $\frac{x-2}{x^2(1+x)}$ را تجزیه کنید

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x}$$

دقت کنید x^2 یک عامل درجه اول تکراری محسوب میشه

در ادامه به جای مخرج مشترک گیری بهتره که طرفین رابطه بالا را در مخرج عبارت سمت چپ یعنی $x^2(1+x)$ ضرب کنیم

$$\Rightarrow \quad x-2 = Ax(1+x) + B(1+x) + Cx^2 = (A+C)x^2 + (A+B)x + B$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} A+C=0 \\ A+B=1 \\ B=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A=3 \;, B=-2 \;, C=-3$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{3}{x} + \frac{-2}{x^2} + \frac{-3}{1+x} = \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x}$$

مثال: کسر $\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x}$ را تجزیه کنید

در اینجا چون درجه صورت بزرگتر از مخرج هست بنابراین می بایست صورت را بر مخرج تقسیم کنیم (با استفاده از تقسیم چندجمله ایها) دقت کنید که جواب رو باید به صورت زیر بنویسیم:

$$\frac{\text{صورت}}{\text{مخرج}} = \text{خارج قسمت} + \frac{\text{باقی مانده}}{\text{مخرج}}$$

$$\frac{x^4-3x^2-3x-2}{x^3-x^2-2x} = x+1 + \frac{-(x+2)}{x^3-x^2-2x} = x+1 - \frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$$

در ادامه کار باید کسر $\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}$ رو تفکیک کنیم دقت کنید چون مخرج کسر درجه سوم هست باید ابتدا آن را به حاصل ضرب عوامل درجه اول و دوم تجزیه کنیم:

$$\Rightarrow \quad x^3-x^2-2x = x(x^2-x-2) = x(x-2)(x+1)$$

$$\frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad x+2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$x=0 \quad \Rightarrow \quad 2 = A(-2)(1) + B(-1)(0) + C(0)(-2) \qquad \Rightarrow \quad A = -1$$

$$x=-1 \quad \Rightarrow \quad 1 = A(-3)(0) + B(-1)(0) + C(-1)(-3) \quad \Rightarrow C = \frac{1}{3}$$

$$x=2 \quad \Rightarrow \quad 4 = A(0)(3) + B(2)(3) + C(2)(0) \quad \Rightarrow \quad B = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{-1}{x} + \frac{\frac{2}{3}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{x+1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^4 - 3x^2 - 3x - 2}{x^3 - x^2 - 2x} = x + 1 - \frac{x+2}{x^3 - x^2 - 2x}$$

$$= x + 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{x-2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}\right)$$

انتگرال گیری از کسرهای گویا

همانطور که در ابتدای فصل گفتیم بیشترین دردسر انتگرال گیری از کسرهای گویا مربوط به تجزیه کسر میشه و بعد از اینکه کسر رو تجزیه کردید کار خاصی باقی نمی مونه اما با این حال یکسری از ریزه کاریها رو باید حواستون باشه! که در اینجا به صورت خلاصه براتون توضیح می دم:

گفتیم که بعد از تجزیه کسر مخرج آن به چهار شکل در می آید که برای هر حالت به صورت زیر عمل می کنیم:

۱ – اگر مخرج کسر عامل درجه اول غیر تکراری باشد

در این حالت جواب انتگرال به صورت **لگاریتمی طبیعی** در می آید و به صورت کلی داریم:

$$\int \frac{C}{ax+b}dx = C\int \frac{1}{ax+b}dx = \frac{C}{a}Ln|ax+b|$$

مثال: (ما این مثال رو از انتگرال های تعمیم یافته حل می کنیم البته میشه از روش تغییر متغیر هم استفاده کرد)

$$\int \frac{5}{2x-3}dx = 5\int \frac{1}{2x-3}dx = 5\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2}{2x-3}dx = \frac{5}{2}Ln|2x-3| + c$$

۲–اگر مخرج کسر عامل درجه اول تکراری باشد

در این حالت از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم (داخل پرانتز را **u** می گیریم) و جواب به صورت کسری در می آید

مثال:

$$\int \frac{dx}{(2x-7)^3} \quad \Rightarrow u = 2x-7 \ \Rightarrow du = 2dx \ \Rightarrow \ dx = \frac{du}{2}$$

$$\Rightarrow \ \int \frac{dx}{(2x-7)^3} = \int \frac{\frac{du}{2}}{u^3} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right) = \frac{-1}{4u^2} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(2\mathrm{x}-7)^3} = \frac{-1}{4(2x-7)^2} + c$$

۳-اگر مخرج کسر عامل درجه دوم غیر تکراری باشد

در این حالت برای سادگی ابتدا فرض می کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل($x^2 + a^2$) باشد (در غیر اینصورت باید مخرج را به شکل مربع کامل در آوریم که در ادامه به توضیح آن می پردازیم)

شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت است:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}dx$$

برای حل انتگرال بالا آن را به صورت زیر به دو قسمت تفکیک می کنیم:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+a^2}dx = \int \frac{Ax}{x^2+a^2}dx + \int \frac{B}{x^2+a^2}dx$$

که جواب انتگرال اول به صورت لگاریتم طبیعی و جواب انتگرال دوم به صورت آرک تانژانت است یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{x^2+a^2}dx = A\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x}{x^2+a^2}dx = \frac{A}{2}Ln|x^2+a^2| + c$$

$$\int \frac{B}{x^2+a^2}dx = B\int \frac{1}{x^2+a^2}dx = \frac{B}{a}Arctg\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

تذکر:فرمول زیر رو حتما حفظ کنید:

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2+a^2}dx = \frac{1}{a}Arctg\left(\frac{u}{a}\right) + c}$$

مثال:

$$\int \frac{5x+1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{5x}{x^2+4}\,dx + \int \frac{1}{x^2+4}\,dx$$

برای راحتی کار می توانیم هر یک از انتگرال های بالا را جداگانه حساب کنیم:

$$\int \frac{5x}{x^2+4}\,dx = 5\int \frac{x}{x^2+4}\,dx = 5\left(\frac{1}{2}\right)\int \frac{2x}{x^2+4}\,dx = \frac{5}{2}Ln(x^2+4)+c$$

$$\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = \int \frac{1}{x^2+2^2}\,dx = \frac{1}{2}tan^{-1}\frac{x}{2}+c$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\int \frac{5x+1}{\mathrm{x}^2+4}\,\mathrm{dx} = \frac{5}{2}Ln(\mathrm{x}^2+4)+\frac{1}{2}tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)+c$$

تذکر: اگر مخرج انتگرال داده شده به صورت مربع کامل نباشد باید آن را مربع کامل کنیم (یعنی به شکل u^2+a^2 در آوریم) به عنوان نمونه:

$$x^2+2x+3 = x^2+2x+1+2 = (x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2$$

$$x^2+4x+8 = x^2+4x+4+4 = (x+2)^2+2^2$$

مثال:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} \quad \Rightarrow u = x+1 \quad \Rightarrow du = dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{(x+1)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \int \frac{du}{u^2+\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\frac{u}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$$

۴-اگر مخرج کسر عامل درجه دوم تکراری باشد

در این جا نیز مشابه حالت قبل فرض می کنیم مخرج کسر به صورت مربع کامل باشد شکل کلی انتگرال در این حالت به صورت زیر است:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

برای حل انتگرال بالا(مشابه حالت قبل) آن را به دو قسمت تفکیک می کنیم:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^n}\,dx = \int \frac{Ax}{(x^2+a^2)^n}\,dx + \int \frac{B}{(x^2+a^2)^n}\,dx$$

برای حل دو انتگرال بالا از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم یعنی داریم:

$$\int \frac{Ax}{(x^2+a^2)^n}\,dx \quad \Rightarrow u = x^2 + a^2 \ \ldots$$

$$\int \frac{B}{(x^2+a^2)^n}\,dx \quad \Rightarrow \quad x = \tan t$$

دقت کنید انتگرال دوم از روش **تغییر متغیر مثلثاتی** حل می شود

مثال:

$$\int \frac{5x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{5x}{(x^2+1)^2}\,dx + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx$$

هر یک از انتگرال های بالا را به صورت جداگانه حل می کنیم:

$$\int \frac{5x}{(x^2+1)^2}\,dx \quad \Rightarrow u = x^2+1 \quad \Rightarrow du = 2x\,dx \ \ \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{5x}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{5x}{u^2}\,\frac{du}{2x} = \frac{5}{2}\int \frac{du}{u^2} = \frac{5}{2}\left(\frac{-1}{u}\right) = \frac{-5}{2(x^2+1)} + c$$

مشابه انتگرال دوم در فصل قبل حل شده است بنابراین در اینجا فقط جواب آخر آن را می نویسیم که به شکل زیر است:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c$$

بنابراین جواب نهایی برابر است با:

$$\int \frac{5x+1}{(x^2+1)^2}\,dx = \frac{-5}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1} x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c$$

اکنون که هر یک از چهار حالت بالا را به صورت جداگانه بررسی کردیم چند مثال کلی را با هم حل می کنیم

مثال: انتگرالهای داده شده را حل کنید

$$(a)\int \frac{dx}{x^2-1} \quad (b)\int \frac{x-2}{x^2(1+x)}\,dx \quad (c)\int \frac{x+8}{x^3+4x}\,dx \quad (d)\int \sec x\,dx$$

حل: (مراحل بدست آوردن ثابتها ذکر نشده است)

(a) ابتدا کسر را تجزیه می کنیم:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{-1}{2}$$

$$(a)\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{-1}{2}}{x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

مشخصه که جواب هر دو انتگرال به صورت Ln هست.

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1}dx = \frac{1}{2}Ln|x-1| - \frac{1}{2}Ln|x+1| + \mathrm{c}$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\left|\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}\right| + c = \mathrm{Ln}\sqrt{\frac{\mathrm{x}-1}{\mathrm{x}+1}} + c$$

به طور کلی می توان نشان داد:

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}Ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|$$

اگر چه من اصلا از فرمول حفظ کردن خوشم نمیاد اما این فرمول واقعا بدردتون میخوره(بخصوص در امتحانات تستی)

حل**(b)**: ابتدا کسر را تجزیه می کنیم (تجزیه این کسر رو قبلا انجام داریم)

$$\frac{x-2}{x^2(1+x)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{1+x} \quad \Rightarrow\ A = 3\,,\ \ B = -2\ \ ,C = -3$$

$$\Rightarrow \int \frac{x-2}{x^2(1+x)}\,dx$$

$$= \int\left(\frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - \frac{3}{1+x}\right)dx = 3\int\frac{1}{x}dx - 2\int\frac{1}{x^2}dx - 3\int\frac{1}{1+x}dx$$

$$= 3Ln|x| - 2\left(\frac{-1}{x}\right) - 3Ln|x+1| + c = Ln\left|\frac{x}{x+1}\right|^3 + \frac{2}{x} + c$$

حل**(c)**:

$$\frac{x+8}{x^3+4x} = \frac{x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad \Rightarrow A = 2\,, B = -2\,, C = 1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+8}{x^3+4x}\,dx = \int \left(\frac{2}{x} + \frac{-2x+1}{x^2+4}\right) dx$$

$$= \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-2x+1}{x^2+4}dx = 2\int \frac{1}{x}dx$$

$$- \int \frac{2x}{x^2+4}dx + \int \frac{1}{x^2+4}dx = 2Ln|x| - Ln|x^2+4| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2}$$

$$= Ln\left|\frac{x^2}{x^2+4}\right| + \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{x}{2} + C$$

حل: *(d)*

$$(d) \int \sec x\, dx = \int \frac{dx}{\cos x}.\frac{\cos x}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{1-sin^2 x}dx$$

$$\Rightarrow u = \sin x \quad \Rightarrow du = \cos x\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int \frac{\cos x}{1-sin^2 x}dx = \int \frac{\cos x}{1-u^2}\,\frac{du}{\cos x} = \int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{1+u} + \frac{1}{2}\int \frac{du}{1-u} =$$

$$= \frac{1}{2}Ln|1+u| - \frac{1}{2}Ln|1-u| = \frac{1}{2}Ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + c = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c$$

$$\Rightarrow \int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| + c$$

خب، این هم از شکل سوم جواب انتگرال سکانت.

اما برای اینکه این جواب رو به صورت جواب اول بیان کنیم به صورت زیر عمل می کنیم:

$$\frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right| = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}.\frac{1+\sin x}{1+\sin x}\right| = \frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{1-sin^2 x}\right| =$$

$$\frac{1}{2}\,Ln\left|\frac{(1+\sin x)^2}{cos^2 x}\right| = Ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| = Ln\left|\frac{1}{\cos x} + \frac{\sin x}{\cos x}\right| = Ln|\sec x + \tan x|$$

مسائل فصل چهارم

۱ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$$

$$(2) \int \frac{7x+4}{3x+1}\, dx$$

$$(3) \int \frac{dx}{(3-x^2)}$$

$$(4) \int \frac{dx}{1+e^x}$$

$$(5) \int \frac{3x^3-7x^2+14}{x^2-3x+5}\, dx$$

$$(6) \int \frac{dx}{x(x-1)^2}$$

$$(7) \int \frac{dx}{x^4-a^4}$$

$$(8) \int \frac{x^2}{x-9}\, dx$$

$$(9) \int \frac{x}{3x^2+8x-3}\, dx$$

$$(10) \int \frac{dx}{7x^2-8}$$

۲ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$$(1) \int \frac{dx}{1+x^3}$$

$$(2) \int \frac{x^2+7}{4x^5+4x^3+x}\, dx$$

$$(3) \int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx$$

$$(4) \int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}\, dx$$

$$(5) \int \frac{dx}{\cos x\,(1+\sin x)}$$

$$(6) \int \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

$$(7) \int \frac{dx}{1+x^4}$$

$$(8) \int \frac{dx}{e^{2x}-2e^x+1}$$

فصل پنجم: انتگرال گیری به روش جزء به جزء

در این فصل یکی از زیباترین و مهمترین تکنیکهای انتگرال گیری به نام روش جزء به جزء را با هم فرا می گیریم این روش **معمولا** برای حل انتگرال هایی به صورت ضرب دو تابع به شکل زیر استفاده می شود

$$\int f(x).g(x)dx$$

که $f(x),g(x)$ توابعی از دو جنس مختلف هستند(مثلا حاصلضرب تابع چندجمله ای در مثلثاتی) چند نمونه از انتگرال هایی که با این روش محاسبه می شوند در جدول زیر نشان داده شده اند.

$\int \boldsymbol{x.sin(x)\,dx}$ $\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در مثلثاتی
$\int \boldsymbol{x.e^{2x}dx}$ $\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در نمایی
$\int \boldsymbol{x.Ln(x)dx}$ $\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در لگاریتمی
$\int \boldsymbol{e^{3x}.sin(x)\,dx}$ $\Rightarrow$	حاصلضرب تابع نمایی در مثلثاتی
$\int \boldsymbol{x.\tan^{-1}x\,dx}$ $\Rightarrow$	حاصلضرب تابع چندجمله ای در معکوس مثلثاتی

جدول (۱)

در روش جزء به جزء حل انتگرال داده شده در مساله به یک انتگرال ساده تر منجر می شود که حل آن را از قبل می دانیم. رابطه اصلی این روش به صورت زیر است:

$$\boxed{\int udv = u.v - \int vdu}$$

در رابطه بالا $\int \boldsymbol{udv}$ انتگرال داده شده در مساله است و $\int \boldsymbol{vdu}$ انتگرال ساده تری است که باید آن را حل کنیم

اکنون مراحل این روش را با ذکر یک مثال به صورت قدم به قدم پی می گیریم

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int x.\cos x\,dx$$

<u>**قدم اول:**</u> یکی از توابع جلوی انتگرال را برابر u و تابع دیگر به همراه dx را برابر dv می گیریم

$$\int x.\cos x\,dx \quad \Rightarrow \quad u = x \quad , \quad dv = \cos x\,dx$$

<u>**قدم دوم:**</u> از u دیفرانسیل می گیریم تا du بدست آید و از dv انتگرال می گیریم تا v بدست آید

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos x\,dx \qquad \Rightarrow \quad \int dv = \int \cos x\,dx \quad \Rightarrow v = \sin x$$

<u>**قدم سوم:**</u> $u\,,du\,,\ v, dv$ را در رابطه انتگرال گیری جزء به جزء جایگذاری کرده و انتگرال سمت راست را محاسبه می کنیم

$$\int udv = u.v - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int x.cos\,x\ \ dx = x.sin\,x - \int sin\,x\,dx = x.sin\,x + cos\,x + c$$

همانطور که ملاحظه می کنید انتگرال سمت راست (انتگرال سینوس) به راحتی محاسبه شد.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int Lnx\,dx$$

<u>**قدم اول:**</u> در اینجا چون فقط یک تابع در جلوی انتگرال داریم همان را برابر u می گیریم و dv را برابر dx قرار می دهیم

$$u = Ln\,x \quad , \quad dv = dx$$

قدم دوم:

$$u = Ln\, x \quad \Rightarrow_{\text{دیفرانسیل}} \; du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow_{\text{انتگرال}} \quad v = x$$

قدم سوم:

$$\int Ln\, x\, dx = x.Ln\, x - \int x\left(\frac{1}{x}dx\right) = x.Ln\, x - x = x(Ln\, x - 1) + \mathrm{c}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x.e^x dx$$

حل: در اینجا مسئله را به صورت خلاصه حل می کنیم:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x dx \quad \Rightarrow \int dv = \int e^x dx \quad \Rightarrow v = e^x$$

$$\Rightarrow \int x.e^x\, dx = x.e^x - \int e^x dx = x.e^x - e^x = e^x(x-1) + c$$

آقا اجازه: از کجا بفهمیم که کدوم تابع رو u بگیریم؟ مثلا میشه در سوال بالا e^x رو برابر u بگیریم

استاد: عجب!! یه سوال به درد بخور پرسیدی!

بزار $u = e^x$ قرار بریم ببینیم چی میشه؟

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x dx$$

$$dv = x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{x^2}{2}$$

حالا روابط بالا را در فرمول انتگرال گیری جزء به جزء جایگزین می کنیم:

$$\int x.e^x\,dx = \frac{x^2}{2}e^x - \int \frac{x^2}{2}e^x dx$$

همانطور که ملاحظه می کنید محاسبه انتگرال سمت راست مشکل تر از انتگرال اولیه است بنابراین انتخاب $u = e^x$ مناسب نیست .

آقا اجازه: بالاخره کدوم تابع رو برابر u بگیریم؟

استاد: در حالت کلی نمیشه جواب سوال بالا رو داد؟ اما بالاخره یه راههای میانبری وجود داره! پس موبایلتو خاموش کن و خوب گوش بده!

در کتابای مختلف یه سری راهنمایی برای انتخاب u وجود داره اما به نظر من زیاد دلچسب نیست بنابراین در اینجا یه قلق **انتگرال فوری** بهتون یاد میدم که در **اکثر** موارد جواب می ده.(البته این قلق رو جایی لو نرید بهتره دلیلش رو بعدا بهتون می گم!)

اول از همه فرض کنید انتگرال ما به شکل زیر باشه

$$\int f(x).g(x)dx$$

حالا انتگرال هر یک از توابع رو به صورت جداگانه می نویسیم یعنی:

$$\int f(x)dx \qquad \int g(x)dx$$

اکنون دو حالت رو در نظر می گیریم:

حالت اول: اگر جواب هر دو انتگرال بالا را از فرمولهای پایه یا تعمیم یافته بدانیم آنوقت تابع ساده تر را برابر u می گیریم.

به عنوان مثال فرض کنیم انتگرال داده شده به صورت زیر باشد:

$$\int x.\sin x\,dx$$

حالا انتگرال هر یک از دو تابع(یعنی x , $\sin x$)رو به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \qquad \int \sin x\,dx = -\cos x$$

چون جواب هر دو انتگرال را می دانیم بنابراین از بین دو تابع x , $\sin x$ تابع ساده تر یعنی x را برابر u می گیریم.

<u>حالت دوم</u>: اگر جواب یکی از انتگرال ها را ندانیم همان تابع را برابر u می گیریم

به عنوان مثال فرض کنید انتگرال داده شده به صورت زیر باشد:

$$\int x.Ln\,x\,dx$$

ابتدا انتگرال هر یک از توابع را به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \quad , \quad \int Ln\,x\,dx = \text{نمیدانیم}$$

بنابراین چون جواب انتگرال $Ln\,x$ را نمی دانیم تابع $Ln\,x$ را برابر u می گیریم پس داریم:

$$u = Ln\,x \quad , \quad dv = xdx$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x.e^{2x}dx$$

حل: ابتدا انتگرال هر یک از توابع را به صورت جداگانه می نویسیم:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} \qquad , \qquad \int e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}$$

چون جواب هر دو انتگرال را می دانیم تابع ساده تر یعنی x را برابر u می گیریم (البته قسمت بالا رو توی چکنویس بنویسید)

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx \qquad , \quad dv = e^{2x}dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$$

جایگزینی $\Rightarrow \int x.e^{2x}dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}x.e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}$

$$\int x.e^{2x}dx = \frac{1}{4}e^{2x}(2x-1) + c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{Ln\, x}{x}dx$$

انتگرال داده شده را به صورت زیر می نویسیم:

$\int \frac{Ln\, x}{x}dx = \int \frac{1}{x}Ln\, x\, dx \quad \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = Ln\, x \quad \int Ln\, x\, dx \quad \Rightarrow$ نمی دانیم

$$\Rightarrow \; u = Ln\, x \quad \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \; dv = \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \; \int dv = \int \frac{1}{x}dx \quad \Rightarrow \quad v = Ln\, x$$

جایگزینی $\Rightarrow \; \int \frac{Ln\, x}{x}dx = (Ln\, x)^2 - \int \frac{Ln\, x}{x}\, dx$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست همان انتگرال اولیه(سمت چپ) در اومد بنابراین آن را به سمت چپ می بریم:

جایگزینی $\Rightarrow \; \int \frac{Ln\, x}{x}dx + \int \frac{Ln\, x}{x}\, dx = (Ln\, x)^2$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{Ln\, x}{x}\, dx = \frac{(Ln\, x)^2}{2} + c$$

البته انتگرال بالا را میشه از روش تغییر متغیر خیلی سریعتر حل کرد.

نکته مهم: برخی اوقات باید چند بار از روش جزء به جزء استفاده کرد یعنی برای محاسبه انتگرال سمت راست دوباره نیاز به انتگرال گیری جزء به جزء داریم.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x^2 cos\, x\, dx$$

نحوه محاسبه رو خودتون انجام بدید:

$$u = x^2 \quad \Rightarrow du = 2xdx \quad , \qquad dv = \cos x\, dx \quad \Rightarrow v = \sin x$$

جایگزینی $\quad \Rightarrow \int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x.\sin x\, dx$

اکنون برای محاسبه انتگرال سمت راست مجددا از روش جزء به جزء استفاده می کنیم

$\int x.\sin x\, dx \quad \Rightarrow$ روش جزء به جزء

$$\Rightarrow \quad u = x \ \Rightarrow du = dx \quad , \quad dv = \sin x\, dx \ \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int x.\sin x\, dx = -x.\cos x - \int (-\cos x)\ dx = -x.\cos x + \sin x$$

اکنون با جایگذاری جواب انتگرال بالا در رابطه اصلی داریم:

$$\int x^2 \cos x\, dx = x^2 \sin x - 2\int x.\sin x\, dx = x^2 \sin x - 2(-x.\cos x + \sin x)$$

$$\Rightarrow \int x^2 cos\, x\, dx = x^2.sin\, x + 2x.cos\, x - 2\, sin\, x + c$$

البته انتگرال بالا را می توان از روشی به نام **روش جدول** به صورت ساده تر و سریعتری حل کرد که در ادامه فصل به آن اشاره می کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int arctan(x)\, dx$$

$$u = arctan(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{1+x^2} \quad , \qquad dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = x$$

$$\text{جایگزاری} \quad \Rightarrow \int arctan(x)\, dx = x.arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx =$$

$$= x.arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\, dx = x.arctan(x) - \frac{1}{2} Ln(1+x^2)$$

$$\int arctan(x)\, dx = x.arctan(x) - \frac{1}{2} Ln(1+x^2)$$

تذکر: یادتون باشه وقتی با یک انتگرال کسری مواجه شدید اول به مخرج کسر نگاه کنید...

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int e^x \sin x\, dx$$

حل:

از آنجاییکه انتگرال هر دو تابع e^x و $\sin x$ را می دانیم قرار می دهیم:

$$u = e^x \quad \Rightarrow \quad du = e^x \quad , \quad dv = \sin x\, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

$$\Rightarrow \int e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x\, dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست رابطه بالا جزء انتگرال های ساده نیست و برای حل آن باید دوباره از روش جزء به جزء استفاده کنیم. برای سادگی قرار می دهیم:

$$I_1 = \int e^x \sin x\, dx \qquad , \qquad I_2 = \int e^x \cos x\, dx$$

بنابراین رابطه بالا را می توان به صورت زیر نوشت:

$$I_1 = -e^x \cos x + I_2 \quad \Rightarrow \quad I_1 - I_2 = -e^x \cos x \quad (*)$$

اکنون به محاسبه انتگرال زیر می پردازیم :

$$\mathrm{I}_2 = \int e^x \cos x \, dx$$

$$\Rightarrow \quad u = e^x \quad \Rightarrow du = e^x \, dx \quad , \quad dv = \cos x \, dx \quad \Rightarrow \quad v = \sin x$$

$$\Rightarrow \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \, dx$$

$$\Rightarrow \; I_2 = e^x \sin x - I_1 \quad \Rightarrow \quad I_1 + I_2 = e^x \sin x \quad (**)$$

اکنون اگر دو رابطه (*) و (**) را به صورت دستگاه دو معادله دو مجهولی بنویسیم داریم:

$$\begin{cases} I_1 - I_2 = -e^x \cos x \\ I_1 + \mathrm{I}_2 = e^x \sin x \end{cases}$$

با جمع دو رابطه بالا داریم:

$$2I_1 = e^x(\sin x - \cos x) \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\Rightarrow \; I_1 = \int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

اکنون اگر دو رابطه را از هم کم کنیم داریم:

$$2I_2 = e^x(\sin x + \cos x) \quad \Rightarrow \quad I_2 = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

$$I_2 = \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

تذکر مهم: این دو تا انتگرال و روش بدست آوردن آنها خیلی مهم است (بخصوص در دروس معادلات دیفرانسیل و ریاضیات مهندسی)

$$\int e^x \sin x\, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$$

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x(\sin x + \cos x)}{2}$$

در حالت کلی می توان نشان داد: (a, b اعدادی ثابت هستند)

$$\int e^{ax} \sin bx\, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2}$$

ترکیب روش جزء به جزء با تغییر متغیر

برخی اوقات انتگرال داده شده را نمی توان مستقیما از روش جزء به جزء حل کرد بلکه ابتدا باید از روش تغییر متغیر انتگرال را به شکل دلخواه در بیاوریم سپس از روش جزء به جزء استفاده کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int e^{\sqrt{x}}\, dx$$

حل: چون در جلوی انتگرال فقط یک تابع داریم بنابراین ناچاریم قرار دهیم:

$$u = e^{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow du = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \quad , \qquad dv = dx \quad \Rightarrow v = x$$

$$\Rightarrow \int e^{\sqrt{x}} dx = x e^{\sqrt{x}} - \int \frac{x}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = x e^{\sqrt{x}} - \int \frac{\sqrt{x}}{2} e^{\sqrt{x}}\, dx$$

همانطور که می بینید انتگرال سمت راست از انتگرال اولیه مشکلتر شد بنابراین روش جزء به جزء در اینجا جواب نمیدهد.

اکنون برای رهایی از بن بست از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم:

$$t = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2t}\ dx \quad \Rightarrow dx = 2t\ dt$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = \int e^{t}\,.2t\ dt = 2\int t.e^{t} dt$$

انتگرال بالا رو قبلا از روش جزء به جزء محاسبه کردیم که جواب به صورت زیر هست:

$$\int t.e^{t} dt = e^{t}(t-1) \quad \Rightarrow \int e^{\sqrt{x}} dx = 2\int t.e^{t} dt = 2e^{t}(t-1)$$

بنابراین جواب نهایی به صورت زیر هست:

$$\int e^{\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-1\right) + c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

انتگرال بالا را نمی توانیم بصورت سرراست از روش جزء به جزء حل کنیم (اگه بیکارید می تونید امتحان کنید!!) بنابراین ابتدا به سراغ روش تغییر متغیر می رویم.

$$t = -x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = -2x\ dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{-2x}$$

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \int x^3 e^{t} \frac{dt}{-2x} = \frac{1}{2}\int -x^2\ e^{t} dt = \frac{1}{2}\int t.e^{t}\ dt$$

(انتگرال بالا قبلا محاسبه شده)

$$\int x^3 e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\int t.e^{t}\ dt = \frac{1}{2}e^{t}(t-1) = \frac{-1}{2}e^{-x^2}(x^2+1) + c$$

انتگرال های ابتکاری

برخی از انتگرالها از روشهایی که تا اینجا به آنها اشاره کردیم قابل حل نیستند و برای حل آنها باید کمی ابتکار عمل به خرج داد (یعنی باید بیشتر مخ بسوزونید) البته تعداد این انتگرال ها بسیار کم است و معمولا سر و کله آنها فقط در امتحان پیدا می شود!!!

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{x.e^x}{(1+x)^2}\,dx$$

حل:

$$\int \frac{x}{(1+x)^2}dx \quad \Rightarrow \quad \text{نمی دانیم}$$

$$\int e^x\,dx = e^x \quad \Rightarrow \quad \text{می دانیم}$$

در اینجا اگر مطابق روال قرار دهیم $u = \frac{x}{(1+x)^2}$ به جواب نمی رسیم بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int \frac{x.e^x}{(1+x)^2}\,dx = \int \frac{1}{(1+x)^2}\,xe^x\,dx$$

$$\int x.e^x\,dx \quad \Rightarrow \quad \text{نمی دانیم}$$

$$\int \frac{1}{(1+x)^2}dx = \frac{-1}{1+x} \quad \Rightarrow \quad \text{می دانیم}$$

دقت کنید انتگرال دوم با یک تغییر متغیر ساده حل می شود.

اکنون داریم:

$$u = x.e^x \quad \Rightarrow \quad du = (1+x)e^x$$

$$dv = \frac{1}{(1+x)^2}dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \frac{1}{(1+x)^2}dx \quad \Rightarrow t = 1+x \quad \Rightarrow dt = dx$$

$$v=\int \frac{dt}{t^2}=\frac{-1}{t} \quad \Rightarrow \quad v=\frac{-1}{1+x}$$

اکنون با جایگذاری در رابطه انتگرال گیری جزء به جزء داریم:

$$\int \frac{x.e^x}{(1+x)^2}\,dx=\frac{-x.e^x}{1+x}+\int e^x dx=\frac{-x.e^x}{1+x}+e^x=\frac{e^x}{1+x}+c$$

مثال:مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int x^3 e^{-x^2} dx$$

حل:

$$\int x^3 dx=\frac{x^4}{4} \quad \Rightarrow \text{ می دانیم} \qquad \int e^{-x^2}\,dx \quad \Rightarrow \text{ نمی دانیم}$$

طبق روال باید قرار دهیم $u=e^{-x^2}$ اما این انتخاب به مشکل بر می خورد بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int x^3.e^{-x^2}dx=\int x^2.xe^{-x^2}\,dx$$

$$\int x^2 dx=\frac{x^3}{3} \quad \Rightarrow \text{ می دانیم}$$

$$\int xe^{-x^2}\,dx=\frac{-1}{2}\int -2x.e^{-x^2}dx=\frac{-1}{2}e^{-x^2} \quad \Rightarrow \text{ می دانیم}$$

بنابراین تابع ساده تر یعنی x^2 را برابر u می گیریم.

$$u=x^2 \quad \Rightarrow du=2x\,dx \;,\;\; dv=x.e^{-x^2} \quad \Rightarrow v=\frac{-1}{2}e^{-x^2}$$

$$\int x^3 e^{-x^2}dx=\frac{-1}{2}e^{-x^2}.x^2-\int \frac{-1}{2}e^{-x^2}.2x\,dx=\frac{-1}{2}e^{-x^2}.x^2-\frac{1}{2}e^{-x^2}$$

$$=-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)+c$$

روش جدول

این روش در واقع حالت خاصی از روش جزء به جزء است که در درس معادلات دیفرانسیل و ریاضی مهندسی کاربرد زیادی دارد و باعث افزایش سرعت و سهولت محاسبات می گردد این روش زمانی قابل استفاده است که انتگرال داده شده به صورت زیر باشد.

$$\int \left(\text{چند جمله ای}\right)\begin{pmatrix} e^{\alpha x} \\ \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{pmatrix} dx$$

یعنی به صورت ضرب دو تابع که یکی از آنها حتما چند جمله ای و دیگری مثلثاتی یا نمایی است به عنوان مثال انتگرال های زیر را می توان از روش جدول محاسبه کرد:

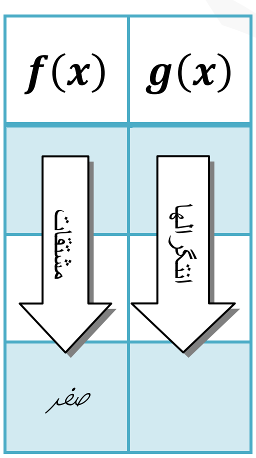
$$\int x.\sin 2x\, dx \quad , \quad \int x^2.e^{5x} dx \quad , \quad \int 2x.\cos 3x\, dx$$

اکنون مراحل کار در روش جدول را به صورت قدم به قدم توضیح می دهیم.

قدم اول: ابتدا از تابع چندجمله ای چندبار مشتق می گیریم تا برابر صفر شود و از تابع دیگر به همان تعداد انتگرال می گیریم سپس جدولی با دو ستون رسم کرده و تابع چندجمله ای و مشتقات آن را در ستون سمت چپ و تابع نمایی یا مثلثاتی به همراه انتگرالهای آن را در ستون سمت راست می نویسیم.

$$f(x) \;\Rightarrow\; \text{تابع چند جمله ای}$$

$$g(x) \;\Rightarrow\; \text{تابع مثلثاتی یا نمایی}$$



به عنوان مثال فرض کنید محاسبه انتگرال زیر خواسته شده باشد:

$$\int x^2.\sin x\, dx$$

$$\Rightarrow f(x) = x^2 \quad , \quad g(x) = \sin x$$

ابتدا از x^2 مشتق می‌گیریم تا برابر صفر شود سپس به همان تعداد از $\sin x$ انتگرال می‌گیریم.

$$x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x \xrightarrow{\text{مشتق}} 2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 0$$

$$\sin x \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\cos x \xrightarrow{\text{انتگرال}} -\sin x \xrightarrow{\text{انتگرال}} \cos x$$

اکنون مقادیر بالا را در جدول قرار می‌دهیم:

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

قدم دوم: در این مرحله دو ستون جدول را به صورت مورب با علامت یک در میان مثبت و منفی در هم ضرب کرده و سپس جملات را با هم جمع می‌کنیم تا جواب انتگرال بدست آید.

x^2	$\sin x$
$2x$	$-\cos x$
2	$-\sin x$
0	$\cos x$

$$\int x^2.\sin x \; dx = +(x^2)(-\cos x) - (2x)(-\sin x) + (2)(\cos x) = 2x.\sin x + (2-x^2)\cos x$$

تذکرمهم: هنگام جمع کردن جملات به علامت مثبت و منفی فلشها دقت کنید.

مثال: انتگرال زیر را از روش جدول محاسبه کنید:

$$\int x.e^{2x}\,dx$$

حل: در اینجا راه حل انتگرال رو به صورت خلاصه بیان می کنیم.

x	e^{2x}
1	$\dfrac{e^{2x}}{2}$
0	$\dfrac{e^{2x}}{4}$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x}\,dx = +(x).\left(\frac{e^{2x}}{2}\right) - (1)\left(\frac{e^{2x}}{4}\right) + c$$

$$\Rightarrow \int x.e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

مثال: انتگرال زیر را از روش جدول محاسبه کنید:

$$\int x^2.\cos(2x)\,dx$$

حل: بازم تاکید می کنم <u>حواستون به علامت ها باشه!!</u>

x^2	$\cos 2x$
$2x$	$\dfrac{1}{2}\sin 2x$
2	$\dfrac{-1}{4}\cos 2x$
0	$\dfrac{-1}{8}\sin 2x$

$$\int x^2.\cos(2x)\,dx =$$

$$= +(x^2)\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) - (2x)\left(\frac{-1}{4}\cos 2x\right) + (2)\left(\frac{-1}{8}\sin 2x\right)$$

$$\Rightarrow \int x^2.\cos(2x)\,dx = \frac{x^2}{2}\sin 2x + \frac{x}{2}\cos 2x - \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

مسائل فصل پنجم

۱ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

(1) $\int \sin^{-1}(x)\, dx$

(2) $\int \sin(Ln\, x)\ dx$

(3) $\int x.sec^2 x\, dx$

(4) $\int x.\tan^{-1}(x)\, dx$

(5) $\int \frac{Ln(Ln\, x)}{x}\ dx$

(6) $\int (x^3 - 14)e^{-2x}\, dx$

(7) $\int x.\sec x\,.\tan x\ dx$

(8) $\int x.e^{\sqrt{x}}\ dx$

(9) $\int e^{3x}.\cos 4x\, dx$

(10) $\int \frac{Ln\, x}{\sqrt{x}} dx$

۲ -انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

(1) $\int \sqrt{4 - x^2}\ dx$

(2) $\int x.e^x.\sin x\ dx$

(3) $\int x.\sin^{-1}(x)\ dx$

(4) $\int \sec x\,.tan^2 x\, dx$

(5) $\int \frac{sin^2 x}{e^x}\ dx$

(6) $\int (\sin^{-1} x)^2 dx$

(7) $\int sec^3 x\, dx$

(8) $\int x.(\tan^{-1} x)^2\ dx$

(9) $\int \sin x\,.Ln(\tan x)\ dx$

(10) $\int x.Ln\left(x + \frac{1}{x}\right) dx$

فصل ششم:انتگرالهای مثلثاتی

در فصول گذشته برخی از انتگرال های ساده مثلثاتی را با هم مرور کردیم در این فصل برخی دیگر از این انتگرال ها را با هم بررسی می کنیم که عموما شامل توانهای سینوس و کسینوس می شوند دراین قسمت طبق روال مرسوم در اکثر کتابهای ریاضی، برای سادگی کار انتگرال های مثلثاتی را دسته بندی می کنیم.

دسته اول: انتگرال توانهای زوج سینوس و کسینوس

شکل کلی این انتگرال ها به صورت زیر است: (k یک عدد مثبت فرض می شود)

$$\int sin^{2k}x\,dx \qquad \int cos^{2k}x\,dx$$

برای حل انتگرال های بالا باید از شر توانهای زوج خلاص بشیم به همین خاطر از فرمولهای مهمی موسوم به **روابط کاهش توان** استفاده می کنیم که به منظور یادآوری مجددا اونها رو براتون می نویسم:

یادآوری۱۲

$$cos\,2x = 2cos^2x - 1 \quad \Rightarrow \quad cos^2x = \frac{1+cos\,2x}{2}$$

$$\cos 2x = 1 - 2sin^2x \quad \Rightarrow \quad sin^2x = \frac{1-cos\,2x}{2}$$

آقا اجازه: اگر جلوی سینوس یا کسینوس به جای x یه عبارت دیگه بود چیکار کنیم؟

استاد: ببین فرقی نمیکنه هرچی جلوی سینوس یا کسینوس باشه وقتی توان۲ اون ازبین میره روبرابر میشه به عنوان مثال:

$$sin^2 3x = \frac{1-cos\,6x}{2} \quad , \quad sin^2(Lnx) = \frac{1-cos(2Lnx)}{2}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int cos^2x\,dx$$

حل: این انتگرال رو قبلا در فصل دوم حل کردیم اما به خاطر اهمیتی که داره دوباره حلش می کنیم:

$$\int cos^2x\,dx = \int \frac{1+cos\,2x}{2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int(1+cos\,2x)dx = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$$

$$\Rightarrow \int cos^2x\,dx = \frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c = \frac{1}{2}(x+\sin x\,.\cos x)+\mathrm{c}$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int sin^4x\,dx$$

حل:

$$\int sin^4x\,dx = \int (sin^2x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-cos\,2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$\int \frac{1+cos^2 2x-2\cos 2x}{4}dx = \frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int cos^2 2x-\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

برای محاسبه انتگرال دوم باید دوباره از رابطه کاهش توان استفاده کنیم.

$$cos^2 2x = \frac{1+cos\,4x}{2} \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int cos^2 2x+\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$
$$= \frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)-\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx$$

$$\Rightarrow \int sin^4x\,dx = \frac{x}{4}+\frac{1}{8}\left(x+\frac{\sin 4x}{4}\right)-\frac{\sin 2x}{4}+c = \frac{3x}{8}+\frac{\sin 4x}{32}-\frac{\sin 2x}{4}+c$$

دسته دوم: انتگرال توانهای فرد سینوس و کسینوس

شکل کلی این انتگرال ها به صورت زیر است (k یک عدد مثبت فرض می شود)

$$\int sin^{2k+1}x\,dx \qquad \int cos^{2k+1}x\,dx$$

برای حل این انتگرال ها به صورت زیر عمل می کنیم:

ابتدا سینوس یا کسینوس را به صورت زیر تفکیک می کنیم:

$$sin^{2k+1}x = sin^{2k}x\,.\,sinx \qquad , \qquad cos^{2k+1}x = cos^{2k}x\,.\,cosx$$

به عنوان مثال:

$$sin^5x = sin^4x\,.\,sinx \qquad , \qquad cos^3x = cos^2x\,.\,cosx$$

در مرحله بعد با استفاده از اتحاد $sin^2x + cos^2x = 1$ سینوس را بر حسب کسینوس و کسینوس را بر حسب سینوس می نویسیم

$$sin^{2k+1}x = sin^{2k}x\,.\,sinx = (sin^2x)^k\,.\,sinx = (1-cos^2x)^k\,.\,sinx$$

$$cos^{2k+1}x = cos^{2k}x\,.\,cosx = (cos^2x)^k\,.\,cosx = (1-sin^2x)^k\,.\,cosx$$

و در آخر برای انتگرال سینوس از تغییر متغیر $u=\cos x$ و برای انتگرال کسینوس از تغییر متغیر $u=\sin x$ استفاده می کنیم.

اکنون مراحل بالا را به صورت خلاصه بازنویسی می کنیم:

$$\int sin^{2k+1}x\,dx = \int sin^{2k}x\,.\,sinx\,dx = \int (sin^2x)^k\,.\,sinx\,dx$$
$$= \int (1-cos^2x)^k\,.\,sinx\,dx \quad \Rightarrow \quad u=\cos x \;\ldots..$$

به همین ترتیب برای انتگرال کسینوس داریم:

$$\int cos^{2k+1} x\, dx = \int cos^{2k}x\, .cosx\ dx = \int (cos^2x)^k\, .cosx\, dx$$
$$= \int (1 - sin^2x)^k\, .cosx\ dx \quad \Rightarrow \quad u = \sin x\ \ldots..$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int cos^3x\, dx$$

حل:

$$\int cos^3 x\, dx = \int cos^2x\, .cosx\ dx = \int cos^2x\, .cosx\, dx$$
$$= \int (1 - sin^2x)\, .cosx\ dx$$

$$\Rightarrow u = \sin x \qquad du = \cos x\ dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\int (1 - sin^2x)\, .cosx\ dx = \int (1 - u^2) . \cos x\ \frac{du}{\cos x} = \int (1 - u^2)\, du$$
$$= u - \frac{u^3}{3} + c = \sin x - \frac{sin^3x}{3} + c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int sin^5x\, dx$$

حل:

$$\int sin^5 x\, dx = \int sin^4x\, .sinx\ dx = \int (sin^2x)^2\, .sinx\, dx$$
$$= \int (1 - cos^2x)^2\, .sinx\ dx$$

$$\Rightarrow u = \cos x \quad du = -\sin x\, dx \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{-du}{sin\ x}$$

$$\int (1 - cos^2 x)^2 \,. sinx\ \ dx = \int (1 - u^2)^2 \,. sinx\ \frac{-du}{sin\ x} = -\int (1 - u^2)^2\ \ du$$

$$= -\int (1 + u^4 - 2u^2)\, du = -\left(u + \frac{u^5}{5} - \frac{2u^3}{3}\right)$$

$$= -\left(\cos x + \frac{cos^5 x}{5} - \frac{2cos^3 x}{3}\right) + c$$

<u>دسته سوم:انتگرال های به فرم $\int sin^m x . cos^n x\ dx$ وقتی توانها اعداد صحیح مثبت باشند</u>

این دسته از انتگرال ها خود شامل دو حالت می شوند که عبارتند از:

<u>حالت ۱:</u> وقتی حداقل یکی از توانها فرد باشند.

در این حالت تابعی که توان فرد دارد را مانند دسته دوم تفکیک کرده و از روش تغییر متغیر استفاده می کنیم

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر

$$\int sin^2 x . cos^3 x\ dx$$

حل: دقت کنید در اینجا کسینوس توان فرد دارد بنابراین انتگرال را به صورت زیر می نویسیم:

$$\int sin^2 x . cos^3 x\ dx = \int sin^2 x . cos^2 x . \cos x\ \ dx = \int sin^2 x . (1 - sin^2 x) . \cos x\ \ dx$$

$$u = \sin x \quad \Rightarrow \quad du = \cos x\ \ dx \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int sin^2 x . (1 - sin^2 x) . \cos x\ \ dx = \int u^2 . (1 - u^2) \,. \cos x \frac{du}{\cos x}$$

$$= \int u^2 . (1 - u^2)\ \ du = \int (u^2 - u^4) du = \frac{u^3}{3} - \frac{u^5}{5} = \frac{sin^3 x}{3} - \frac{sin^5 x}{5} + c$$

حالت۲: وقتی توان هر دو تابع سینوس و کسینوس زوج باشد.

در این حالت مانند دسته اول از فرمولهای کاهش توان استفاده می کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int sin^2x.cos^2x\ dx$$

حل:

$$\begin{aligned}\int sin^2x.cos^2x\ dx &= \int \left(\frac{1-cos\,2x}{2}\right)\left(\frac{1+cos\,2x}{2}\right)dx\\ &= \frac{1}{4}\int (1-cos\,2x)(1+cos\,2x)dx = \frac{1}{4}\int (1-cos^2 2x)\ dx\\ &= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int cos^2 2x\ dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\ dx\\ &= \frac{x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} = \frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32} + c\end{aligned}$$

دسته چهارم: انتگرال حاصلضرب سینوس و کسینوس

این انتگرال ها خود شامل سه حالت می شوند که عبارتند از:

$$(a)\quad \int sin(\alpha x)\,.\,sin(\beta x)\ dx$$

$$(b)\quad \int \cos(\alpha x)\,.\cos(\beta x)\ dx$$

$$(c)\quad \int \sin(\alpha x)\,.\cos(\beta x)\,dx$$

برای حل انتگرال های بالا از روابط تبدیل حاصلضرب به جمع استفاده می کنیم بنابراین جهت یادآوری این روابط را در زیر می نویسیم:

یادآوری ۱۳

$$sin(\alpha x)\,.\,sin(\beta x) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)\,x]$$

$$\cos(\alpha x)\,.\cos(\beta x) = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta)x + \cos(\alpha + \beta)\,x]$$

$$\sin(\alpha x)\,.\cos(\beta x) = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)\,x]$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int sin(7x)\,.\,cos(5x)\ dx$$

حل:ابتدا حاصلضرب بالا را به حاصل جمع تبدیل می کنیم:

$$sin(7x)\,.\,cos(5x) = \frac{1}{2}[sin(7+5)x + sin(7-5)\,x] = \frac{1}{2}[sin(12x) + sin(2x)]$$

$$\Rightarrow \int sin(7x)\,.\,cos(5x)\ dx = \frac{1}{2}\int [\sin(12x) + \sin(2x)]dx$$

$$= \frac{-1}{2}\left(\frac{\cos(12x)}{12} + \frac{\cos(2x)}{2}\right) + c$$

<u>دسته پنجم: محاسبه انتگرالهایی به فرم $\int sin^m x.cos^n x\ dx$ وقتی یکی از توانها منفی یا کسری باشد</u>

این دسته از انتگرالها خود شامل سه حالت می شوند که عبارتند از :

۱ – اگر n (توان کسینوس) یک عدد فرد باشد از تغییر متغیر $sin\,x = t$ استفاده می کنیم.

۲ –اگر m (توان سینوس) یک عدد فرد باشد از تغییر متغیر $cos\,x = t$ استفاده می کنیم.

۳ –اگر $m+n$ زوج باشد از تغییر متغیر $tan\,x = t$ یا $cot\,x = t$ استفاده میکنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{cos^3x}{sin^6x}\, dx$$

حل:

$$\int \frac{cos^3x}{sin^6x}\, dx = \int cos^3x.sin^{-6}x\, dx \quad \Rightarrow n = 3\ , \qquad m = -6$$

چون n فرد است از تغییر متغیر $\sin x = t$ استفاده می کنیم:

$$\sin x = t \quad \Rightarrow \quad \cos x\ dx = dt \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{cos^3x}{sin^6x}\, dx = \int \frac{cos^3x}{t^6}\frac{dt}{\cos x} = \int \frac{cos^2x}{t^6}dt = \int \frac{1-t^2}{t^6}dt$$

$$= \int \frac{1}{t^6}dt - \int \frac{1}{t^4}dt = \frac{t^{-5}}{-5} - \frac{t^{-3}}{-3} + c = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{5t^5} + c$$

$$\Rightarrow \int \frac{cos^3x}{sin^6x}\, dx = \frac{1}{3sin^3x} - \frac{1}{5sin^5x} + c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{sin^2x}{cos^6x}\, dx$$

حل:

$$\int \frac{sin^2x}{cos^6x}\, dx = \int sin^2x.cos^{-6}x\, dx \quad \Rightarrow \ n = -6 \ \ , m = 2 \quad \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

چون $m + n =$ زوج بنابراین از تغییر متغیر $\tan x = t$ استفاده می کنیم:

$$tan\,x = t \quad \Rightarrow \ (1+tan^2x)dx = dt \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+tan^2x} = \frac{dt}{1+\mathrm{t}^2}$$

$$\int \frac{sin^2x}{cos^6x}\,dx = \int \frac{sin^2x}{cos^2x}.\frac{1}{cos^4x}\,dx = \int tan^2x.(1+tan^2x)^2\,dx$$

$$= \int t^2.\left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+\mathrm{t}^2} = \int t^2(1+t^2)dt = \int\left(t^2+t^4\right)dt$$

$$= \frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}+c = \frac{tan^3x}{3}+\frac{tan^5x}{5}+c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{sin^3x}{\sqrt[3]{cos^2x}}dx$$

حل:

$$\int \frac{sin^3x}{\sqrt[3]{cos^2x}}dx = \int sin^3x.cos^{\frac{-2}{3}}x\,dx \ \Rightarrow n = -\frac{2}{3} \ \ ,m=3$$

چون m فرد است از تغییر متغیر $cos\,x = t$ استفاده می کنیم:

$$cos\,x = t \ \Rightarrow \ -\sin x \ \mathrm{dx} = \mathrm{dt} \quad \Rightarrow \mathrm{d}x = -\frac{dt}{\sin x}$$

$$\int \frac{sin^3x}{\sqrt[3]{cos^2x}}dx = \int \frac{sin^3x}{t^{\frac{2}{3}}}\left(-\frac{dt}{\sin x}\right) = -\int \frac{sin^2x}{t^{\frac{2}{3}}}dt = -\int \frac{1-t^2}{t^{\frac{2}{3}}}dt$$

$$= -\int\left(\frac{1}{t^{\frac{2}{3}}}-\frac{t^2}{t^{\frac{2}{3}}}\right)dt = -\int t^{\frac{-2}{3}}\,dt + \int t^{\frac{4}{3}}\,dt = -3t^{\frac{1}{3}}+\frac{3}{7}\mathrm{t}^{\frac{7}{3}}+\mathrm{c}$$

$$= -3\sqrt[3]{\cos \mathrm{x}}+\frac{3}{7}\sqrt[3]{cos^7x}+c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int \frac{dx}{cos^4x}$$

حل:

$$\int \frac{dx}{cos^4x} = \int cos^{-4}x \ dx \quad \Rightarrow n = -4 \ , m = 0 \quad \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

$$tan\, x = t \quad \Rightarrow \ (1 + tan^2x)dx = dt \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{1 + tan^2x} = \frac{dt}{1 + \mathrm{t}^2}$$

$$\Rightarrow \ \int \frac{dx}{cos^4x} = \int \left(\frac{1}{cos^2x}\right)^2 dx = \int (1 + t^2)^2 . \frac{dt}{1 + t^2} = \int (1 + t^2)dt$$

$$= t + \frac{t^3}{3} + c = tan\, x + \frac{tan^3x}{3} + c$$

مثال: مطلوبست محاسبه انتگرال زیر:

$$\int tan^3\mathrm{x}\ \mathrm{dx}$$

حل:

$$\int tan^3x\ dx = \int \frac{sin^3x}{cos^3x} dx \quad \Rightarrow n = -3 \ , m = 3 \quad \Rightarrow m + n = \text{زوج}$$

$$t = \tan x \quad \Rightarrow dt = (1 + tan^2x)dx \quad \Rightarrow dx = \frac{dt}{(1 + t^2)}$$

$$\int tan^3x\ dx = \int t^3 . \frac{dt}{(1 + t^2)} = \int \frac{t^3}{(1 + t^2)}\ dt$$

$$= \int \left(t - \frac{t}{1 + t^2}\right) dt \ = \ \frac{t^2}{2} - \frac{1}{2} Ln(1 + t^2) + c$$

$$= \frac{tan^2x}{2} - \frac{1}{2} Ln(1 + tan^2x) + c$$

مسائل فصل ششم

۱-انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل دست گرمی)

$(1) \int \sin 5x \,.\, \cos 2x \, dx$

$(2) \int \sin 3x \,.\, \sin x \; dx$

$(3) \int \cos 6x \,.\, \cos x \; dx$

$(4) \int sin^2 x. cos^4 x \, dx$

$(5) \int sin^3 x. cos^4 x \; dx$

$(6) \int cos^4 x \, dx$

$(7) \int \frac{1}{sin^4 x} \; dx$

$(8) \int cos^5 x \;\; dx$

۲- انتگرال های زیر را حل کنید (مسائل مخ گرمی)

$(1) \int \frac{cos^4 x}{sin^3 x} \; dx$

$(2) \int \frac{sin^4 x}{\cos x} \; dx$

$(3) \int \cos x \,.\, \cos 2x \,.\, \cos 3x \, dx$

$(4) \int cot^6 x \, dx$

$(5) \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \; dx$

$(6) \int \frac{dx}{cos^4 x. sin^2 x}$

$(7) \int tan^7 x \, dx$

$(8) \int \sin x \,.\, \sin 2x \,.\, \sin 3x \; dx$